Část III.

Elementární úvod do vyšší algebry

Mgr. David Zoul

2012

Obsah

Spektrum operátoru

Definice spektra operátoru

Nechť $f: V \to V$ je lineární operátor a nechť

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \mathbf{v} \in V : \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} . \qquad (1)$$

Potom číslo λ nazýváme vlastní hodnotou operátoru *f* a vektor **v** vlastním vektorem tohoto operátoru. Soubor vlastních hodnot daného operátoru nazýváme **spektrem** tohoto operátoru a značíme $\mathrm{Sp}\ f$.

Definice spektrálního poloměru operátoru

Nechť $\mathrm{Sp}\ f = \{\lambda_i\}$ je spektrum operátoru $f: V \to V$. Potom číslo

$$\rho(f) = \max\{|\lambda_i|\} \qquad (2)$$

nazýváme spektrálním poloměrem operátoru *f*.

Definice charakteristické matice operátoru

Nechť $f: V \to V$ je lineární operátor. Potom matici

$$\mathbf{f}_\lambda = (\mathbf{f} - \lambda \mathbf{E}) \qquad (3)$$

nazýváme **Charakteristickou maticí operátoru** *f* .

První věta spektra

Číslo λ je vlastní hodnotou operátoru $f: V \to V$ právě tehdy, když je kořenem polynomu $\det \mathbf{f}_\lambda$, nazývaného **charakteristickým polynomem operátoru** *f*.

Důkaz

Rovnici (1) zapíšeme jako

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(\lambda\mathbf{E}), \qquad (4)$$

odkud již snadno plyne

$$\mathbf{v}(\mathbf{f} - \lambda\mathbf{E}) = \mathbf{0}. \qquad (5)$$

Tato homogenní soustava má netriviální řešení právě tehdy, je-li její matice singulární, tj. právě když

$$\det \mathbf{f}_{\lambda} = 0. \qquad (6)$$

Rovnici (6) nazýváme **charakteristickou rovnicí operátoru** *f*.

***Příklad 1*:**

Nalezněme celočíselnou vlastní hodnotu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

a jí odpovídající vlastní vektory.

***Řešení*:**

Vyřešení vlastního problému matice **A** představuje vlastně vyřešení homogenní soustavy

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \qquad (8)$$

kde pro charakteristický operátor *f* matice **A** platí

$$f = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & 11-\lambda \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Homogenní soustava má netriviální řešení právě tehdy, je-li její matice singulární, tj. právě když

$$\det(f) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = \tag{10}$$
$$= (2-\lambda)^2 (11-\lambda) - 4(2-\lambda) - 10(2-\lambda) = 0.$$

Z této tzv. charakteristické rovnice operátoru *f* okamžitě plyne jediná celočíselná vlastní hodnota matice **A**:

$$\lambda = 2. \tag{11}$$

Nalezení vlastních vektorů odpovídajících tomuto prvku spektra **A** představuje úlohu nalezení $\ker(f)$.

Výpočet jádra pro naši konkrétní vlastní hodnotu vede na maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Rozepsáním této maticové rovnice do složek okamžitě nalézáme hledané jádro:

$$\ker(f) = \left\{ v_1 \in \mathbb{R} \,\middle|\, (v_1, -2v_1, 0) \right\}. \tag{13}$$

Vlastní vektory, odpovídající vlastní hodnotě (11), tedy tvoří vektorový prostor dimenze 1.

Příklad 2:

Najděme všechny hodnoty reálného parametru *a*, pro něž má matice

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 1 & a\\ -1 & a & 3\end{pmatrix} \tag{14}$$

vlastní hodnotu 2.

Řešení:

V tomto případě už budeme postupovat rychleji:

$$f=\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 1 & a\\ -1 & a & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-\lambda & 1 & 3\\ 2 & 1-\lambda & a\\ -1 & a & 3-\lambda\end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\det(f)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 3\\ 2 & 1-\lambda & a\\ -1 & a & 3-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(3-\lambda)^2(1-\lambda)-(3-\lambda)a^2+6a-2(3-\lambda)-a+3(1-\lambda)=0. \tag{16}$$

Pro $\lambda=2$ dostáváme

$$a^2-5a+6=0 \tag{17}$$

čili

$$a_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}2\\ 3\end{cases} \tag{18}$$

Druhá věta spektra

Nechť charakteristická rovnice operátoru $f:V\to V$ má všechny kořeny jednonásobné. Potom existuje diagonální matice *f* vzhledem k bázi prostoru *V* tvořené vlastními vektory *f*.

Důkaz

Jelikož počet vlastních vektorů odpovídá stupni charakteristické rovnice, tzn. Dimenzi prostoru *V*, stačí nám dokázat jejich nezávislost: Pokud

$$\sum_i u_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \qquad (19)$$

kde $\mathbf{v}_i$ jsou vlastní vektory operátoru

$$f:\mathbf{f}\left(\mathbf{v}_i\right) = \lambda_i \mathbf{v}_i, \qquad (20)$$

pak by

$$\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n} \equiv \mathbf{f}^n\left(\mathbf{v}\right) = \lambda^n \mathbf{v}, \qquad (21)$$

neboli

$$\mathbf{f}^n\left(\sum_i \mu_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_i \mu_i \lambda_i^n \mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \qquad (22)$$

což je však nekonečně mnoho nezávislých rovnic pro neznámou μ_i, a to je neřešitelné.

Třetí věta spektra

Nereálná vlastní čísla a vektory reálného maticového operátoru **A** lze sdružit do párů

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{A}\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}}\,. \tag{23}$$

Důkaz

Obě rovnosti jsou navzájem komplexně sdružené a

$$\overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} \tag{24}$$

je zřejmý fakt.

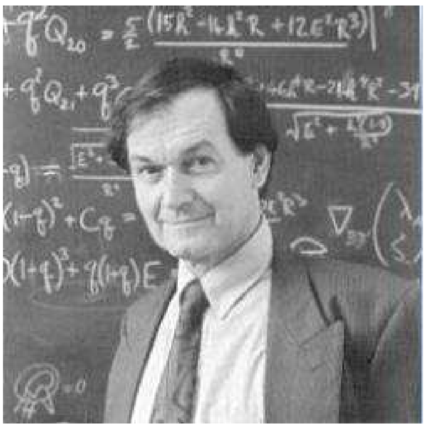
Penrosova věta

V ortogonální matici **A** stupně $2n \times 2n$, zapsané pomocí bloků **a**, **b**, **c**, **d**, stupně $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \tag{25}$$

jsou spektra tzv. **Grammových matic** $\mathbf{a}\mathbf{a}^{\mathsf{T}}$ a $\mathbf{d}\mathbf{d}^{\mathsf{T}}$ stejná a navíc platí

$$\left|\det \mathbf{a}\right| = \left|\det \mathbf{d}\right|. \tag{26}$$



Roger Penrose (1931)

Důkaz

Z ortogonality **A** plyne $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{E}$ což po rozepsání na bloky mimo jiné znamená

$$\mathbf{c}\mathbf{c}^{\mathsf{T}} + \mathbf{d}\mathbf{d}^{\mathsf{T}} = \mathbf{E} \tag{27}$$

a z ekvivalentní rovnosti $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ získáme

$$\mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{a} + \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{c} = \mathbf{E}. \tag{28}$$

Odtud jednoduchou úpravou plyne, že matice

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{a} &= \mathbf{E} - \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{c}, \\ \mathbf{d}\mathbf{d}^{\mathsf{T}} &= \mathbf{E} - \mathbf{c}\mathbf{c}^{\mathsf{T}}, \end{aligned} \tag{29}$$

jsou podobné, neboť zřejmě platí

$$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{c} = \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{c}\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} = \mathbf{c}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{c}, \tag{30}$$

čili

$$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{c} \sim \mathbf{c}\mathbf{c}^{\mathsf{T}}. \tag{31}$$

Označme pro jednoduchost

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{a}^{\mathsf{T}}\mathbf{a}, \\ \boldsymbol{\delta} &= \mathbf{d}\mathbf{d}^{\mathsf{T}}, \end{aligned} \tag{32}$$

potom

$$\exists \mathbf{B} : \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\delta}\mathbf{B}. \tag{33}$$

Odtud

$$\det \boldsymbol{\alpha} = \det\left(\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\delta}\mathbf{B}\right) = \det \mathbf{B}^{-1} \det \boldsymbol{\delta} \det \mathbf{B} = \det \mathbf{B}^{-1} \det \mathbf{B} \det \boldsymbol{\delta} =$$
$$= \det\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\right) \det \boldsymbol{\delta} = \det \mathbf{E} \det \boldsymbol{\delta} = \det \boldsymbol{\delta}. \tag{34}$$

Proto rovněž

$$\det\left(\boldsymbol{\alpha} - \lambda \mathbf{E}\right) = \det\left(\boldsymbol{\delta} - \lambda \mathbf{E}\right), \tag{35}$$

což znamená, že spektra matic $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\delta}$ jsou si skutečně rovna.
Druhá část věty se již dokazuje snadněji:

$$\det \mathbf{a} \cdot \det \mathbf{a}^{\mathsf{T}} = \det \boldsymbol{\alpha} = \det \boldsymbol{\delta} = \det \mathbf{d} \cdot \det \mathbf{d}^{\mathsf{T}}, \tag{36}$$

odkud

$$\det^2 \mathbf{a} = \det^2 \mathbf{d}, \tag{37}$$

což po odmocnění dává dokazovanou rovnost (26).

Nilpotence

Definice nilpotence

Operátor $f : V \to V$ pro který

$$\exists n \in \mathbb{N} : f^n = 0 \tag{38}$$

nazýváme **nilpotentním operátorem**. Nejmenšímu *n* splňujícímu rovnost (38) říkáme **stupeň operátoru** *f*.

První věta nilpotence

Nechť $f : V \to V$ je nilpotentní operátor stupně *n*, dimenze $m \times m$.
Potom

$$\forall i \in 0,1,2,\ldots,n : \dim \ker^i\left(f\right) = i\left(m - h\right), \tag{39}$$

kde h je hodnost f a

$$\ker^{i}\left(f\right)=\left\{\mathbf{v}\in V\,\middle|\,f^{i}\left(\mathbf{v}\right)=\mathbf{0}\right\}. \tag{40}$$

Důkaz

Důkaz plyne bezprostředně z definice nilpotence a z první věty homogenní soustavy.

Důsledek

$$\ker^{0}\left(f\right)\subset\ker^{1}\left(f\right)\subset\cdots\subset\ker^{n}\left(f\right)=\ker^{n+1}\left(f\right). \tag{41}$$

Definice stupně vektoru

Nejmenší číslo $k\in\mathbb{N}$ splňující rovnost

$$f^{k}\left(\mathbf{v}\right)=\lambda^{k}\mathbf{v}=\mathbf{0} \tag{42}$$

nazýváme **stupněm vektoru v**.

Druhá věta nilpotence

Tvoří-li spektrum operátoru $f:V\rightarrow V$ pouze nuly a je-li

$$\ker^{n}\left(f\right)=\ker^{n+1}\left(f\right), \tag{43}$$

potom

$$\ker^{n}\left(f\right)=V. \tag{44}$$

Důkaz

Je tedy

$$\mathrm{Rn}^n(f) = \mathrm{Rn}^{n+1}(f). \qquad (45)$$

To ale znamená, že zobrazení

$$f : \mathrm{Rn}^n(f) \to \mathrm{Rn}^{n+1}(f) \equiv \mathrm{Rn}^n(f) \qquad (46)$$

je izomorfní a tedy regulární na $\mathrm{Rn}^n(f)$. Dále platí řetězec implikací

$$\forall \lambda : \lambda = 0 \Rightarrow \lambda^i = 0 \Rightarrow \lambda^i \mathbf{v_k} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{f}^i(\mathbf{v}_k) = \lambda^i \mathbf{v_k} = \mathbf{0} \Rightarrow \ker^i(f) = \mathbf{v}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{Rn}^n(f) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{h}^n(f) = 0. \qquad (47)$$

K důkazu implikace

$$\mathrm{def}^n(f) = \mathrm{def}^{n+1}(f) \Rightarrow \mathrm{def}^n(f) = \dim V - \mathrm{h}^n(f) = \dim V \qquad (48)$$

stačí již jen vědět, že

$$f^n = 0 \Rightarrow f^{n+1} = 0 \qquad (49)$$

a že vlastní vektory nulové matice tvoří bázi prostoru *V*. Vskutku, přes nulový operátor se každý prvek z *V* zobrazí na nulový vektor, takže platí (44).

Třetí věta nilpotence

Je-li operátor $f : V \to V$ nilpotentní $\Leftrightarrow$ jeho spektrum tvoří pouze nuly.

Důkaz

Je-li *n* stupeň operátoru *f*, potom platí:

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{f}^n(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda^n \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda^n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0. \qquad (50)$$

Definice vektorového řetězce operátoru

Nechť $f: V \to V$ je nilpotentní operátor stupně *k*. Potom řetězec zobrazení

$$\mathbf{v}_1 \to \mathbf{v}_2 \to \cdots \to \mathbf{v}_n \to \mathbf{0}, \qquad (51)$$

kde šipka od $\mathbf{v}_i$ k $\mathbf{v}_{i+1}$ znamená

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_{i+1}, \qquad (52)$$

nazveme **vektorovým řetězcem** délky *n* operátoru *f* vzhledem k vektoru $\mathbf{v}_1$. Všimněme si, že zřejmě $n \le k$.

Čtvrtá věta nilpotence

V libovolném systému vektorových řetězců nilpotentního operátoru *f* jsou všechny vektory lineárně nezávislé právě tehdy, jsou-li nezávislé všechny prvky jádra operátoru *f*.

Důkaz

Nezávislost vektorů z $\ker(f)$ plyne z nezávislosti všech vektorů triviálně (viz první věta lineární kombinace). Předpokládejme naopak, že zmíněné vektory z jádra jsou nezávislé, ale po jejich doplnění ostatními zřetězenými vektory dostaneme přeci jen závislý systém. To znamená, že nějaká netriviální kombinace všech vektorů $\mathbf{v}_i$

$$\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}. \qquad (53)$$

Protože zřejmě platí rovnost

$$\mathbf{f}\left(\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_i \lambda_i \mathbf{f}(\mathbf{v}_i), \qquad (54)$$

musí být nulová i nějaká netriviální lineární kombinace systému vektorových řetězců zkrácených vynecháním prvního vektoru z každého řetězce. Násobným opakováním tohoto postupu, tj. násobným zmenšováním počtu vektorů, které lze netriviálně zkombinovat, dojdeme nakonec k závěru, že i ty poslední nenulové vektory z každého řetězce, tj. vektory náležející do $\ker\left(f\right)$, musí být lineárně nezávislé, což je zřejmý spor s původním předpokladem o jejich závislosti.

Pátá věta nilpotence

Nechť $f: V \to V$ je nilpotentní operátor stupně *k*. Potom existují vektory

$$\begin{array}{cccccccccc}
\mathbf{v}_1^{(k)} & \cdots & \mathbf{v}_n^{(k)} & & & & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & & \\
\mathbf{f}\left(\mathbf{v}_1^{(k)}\right) & \cdots & \mathbf{f}\left(\mathbf{v}_n^{(k)}\right) & \mathbf{v}_1^{k-1} & \cdots & \mathbf{v}_n^{k-1} & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\mathbf{f}^2\left(\mathbf{v}_1^{(k)}\right) & \cdots & \mathbf{f}^2\left(\mathbf{v}_n^{(k)}\right) & \mathbf{f}\left(\mathbf{v}_1^{(k-1)}\right) & \cdots & \mathbf{f}\left(\mathbf{v}_n^{(k-1)}\right) & \cdots & & & \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\mathbf{f}^{k-1}\left(v_1^{(k)}\right) & \cdots & \mathbf{f}^{k-1}\left(v_n^{(k)}\right) & \mathbf{f}^{k-2}\left(v_1^{(k-1)}\right) & \cdots & \mathbf{f}^{k-2}\left(v_n^{(k-1)}\right) & \cdots & \mathbf{v}_1^{(1)} & \cdots & \mathbf{v}_n^{(1)} \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{array} \qquad (55)$$

Důkaz

Najdeme nějakou bázi $\ker^1\left(f\right)$. Ke každému jejímu prvku $\mathbf{v}_i$ určíme vektor $\mathbf{u}_i$, pro který

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i . \tag{56}$$

Vektory $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i \rangle$ pak tvoří bázi $\ker^2(f)$. Tímto způsobem prodlužujeme řetězce dokud nenajdeme bázi celého prostoru

$$\ker^k(f) = V . \tag{57}$$

První věta Jordanova

Každý čtvercový nilpotentní operátor **A** stupně *k* lze psát ve tvaru

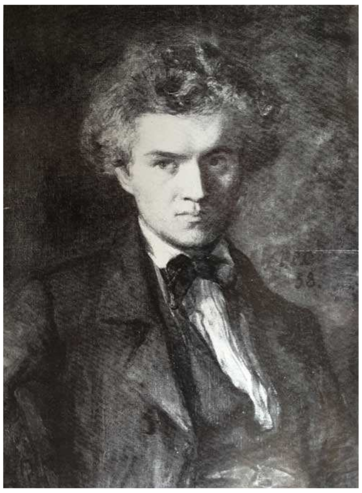
$$\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}, \tag{58}$$

kde matice **J** má tzv. Jordanův blokový tvar:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{J}_n \end{pmatrix}, \tag{59}$$

kde jednotlivé bloky mají tvar typu

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{60}$$



Marie Ennemond Camille Jordan (1838 – 1922)

Důkaz

Vyjádříme zobrazení $\mathbf{x} \to \mathbf{Ax}$ maticí vůči bázi sestrojené v páté větě nilpotence a napsané v pořadí

$$B = \left\langle \mathbf{f}^{k-1}\left(\mathbf{v}_1^{(k)}\right), \ldots, \mathbf{v}_1^{(k)}, \mathbf{f}^{k-1}\left(\mathbf{v}_2^{(k)}\right), \ldots, \mathbf{v}_2^{(k)}, \ldots \right\rangle. \qquad (61)$$

Matice **C** má tedy ve sloupcích souřadnice řetězených vektorů, a to tak, že poslední sloupec se zobrazí do předposledního atd., až druhý sloupec se zobrazí do prvního a ten na nulový vektor. První sloupec je tedy vlastním vektorem příslušejícím vlastní hodnotě nula.
Nechť **Cu** je nějaký vektor vzhledem k původní bázi. Potom $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Cu}$ je týž vektor vzhledem k nové bázi, tj. v bázi řetězců. Zřejmě platí

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Cu} = \mathbf{u}\,. \qquad (62)$$

Vektor $\mathbf{ACu}$ je zobrazením vektoru **Cu** (v původní bázi) přes operátor **A**.
Ju je vektor jež je zobrazením vektoru **u** přes operátor **J** (obé vyjádřeno v bázi řetězců) a **CJu** je jeho vyjádření v původní bázi. Odtud zřejmě

$$\mathbf{AC} = \mathbf{CJ}\,, \qquad (63)$$

což je totéž, jako (58).

Definice kořenového podprostoru operátoru

Nechť λ je element spektra operátoru $f : V \to V$. Označme

$$\ker_\lambda^i(f) = \left\{ \mathbf{v} \in V \middle| (\mathbf{f} - \lambda\mathbf{E})^i \, \mathbf{v} = \mathbf{0} \right\}. \qquad (64)$$

Říkáme, že λ je řádu *k*, jestliže platí

$$\ker_\lambda^1(f) \subset \ker_\lambda^2(f) \subset \cdots \subset \ker_\lambda^k(f) = \ker_\lambda^{k+1}(f). \qquad (65)$$

Podprostor $\ker_\lambda^k(f)$ nazýváme kořenovým podprostorem operátoru *f* vzhledem k číslu λ, a značíme stručně $\ker_\lambda(f)$.

Definice direktního rozkladu vektorového prostoru

Nechť je dán vektorový prostor *V* a jeho podprostory $W_1, W_2, \dots, W_k$. Jestliže

$$\forall \mathbf{v} \in V : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{w}_i \,, \qquad (66)$$

kde $\mathbf{w}_i \in W_i$, říkáme, že podprostory W_i tvoří direktní rozklad prostoru *V*, což zapisujeme

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i . \qquad (67)$$

Definice kořenového doplňku operátoru

Nechť λ je element spektra operátoru $f : V \to V$. Označme

$$\mathrm{Rn}_\lambda^j(f) = \left\{ (\mathbf{f} - \lambda\mathbf{E})^j \, \mathbf{v} = \mathbf{0} \middle| \mathbf{v} \in V \right\}. \qquad (68)$$

Říkáme, že λ je řádu *k*, jestliže platí

$$\mathrm{Rn}_\lambda^1(f) \supset \mathrm{Rn}_\lambda^2(f) \supset \cdots \supset \mathrm{Rn}_\lambda^k(f) = \mathrm{Rn}_\lambda^{k+1}(f). \tag{69}$$

Podprostor $\mathbf{Rn}_\lambda^k(f)$ nazýváme kořenovým doplňkem operátoru *f* vzhledem k číslu λ, a značíme stručně $\mathrm{Rn}_\lambda(f)$.

Definice kořenového defektu operátoru

Nechť $\ker_\lambda(f)$ je kořenovým podprostorem operátoru $f: V \to V$. Potom číslo

$$\dim \ker_\lambda(f) \tag{70}$$

nazýváme kořenovým defektem operátoru *f* a značíme

$$def_\lambda(f). \tag{71}$$

Druhá věta Jordanova

Nechť je dán operátor $f: V \to V$. Potom platí

$$\begin{aligned} &\mathrm{Rn}_\lambda(f) \oplus \ker_\lambda(f) = V, \\ &f\left(\ker_\lambda(f)\right) \subseteq \ker_\lambda(f), \\ &f\left(\mathrm{Rn}_\lambda(f)\right) \subseteq \mathrm{Rn}_\lambda(f). \end{aligned} \tag{72}$$

Důkaz

Dle osmé věty homomorfismu platí

$$\mathrm{h}_\lambda(f) + \mathrm{def}_\lambda(f) = \dim V. \tag{73}$$

Stačí tedy dokázat, že

$$\mathrm{Rn}_{\lambda}(f) \cap \ker_{\lambda}(f) = \{\mathbf{0}\}. \tag{74}$$

Nechť

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathrm{Rn}_{\lambda}(f) \tag{75}$$

Potom

$$\exists \mathbf{u} \in V : \mathbf{f}_{\lambda}^{k}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}. \tag{76}$$

Předpokládejme, že zároveň

$$\mathbf{v} \in \ker_{\lambda}(f). \tag{77}$$

Potom musí být

$$\mathbf{f}_{\lambda}^{k}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}_{\lambda}^{k+1}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \tag{78}$$

To však není možné, neboť

$$\mathrm{Rn}_{\lambda}^{k}(f) = \mathrm{Rn}_{\lambda}^{k+1}(f), \tag{79}$$

takže by již platilo

$$\mathrm{Rn}_{\lambda}(f) = \mathbf{0}, \tag{80}$$

neboli

$$\mathbf{f}_{\lambda}^{k}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} = \mathbf{v}, \tag{81}$$

což je zřejmý spor s původním předpokladem $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
Zbývá ověřit invarianci vůči *f*. Nechť nejprve

$$\mathbf{v} \in \ker_{\lambda}(f). \tag{82}$$

Potom

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) \in \ker_\lambda^{k+1}(f) = \ker_\lambda(f) \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{v}) \in \ker_\lambda(f). \tag{83}$$

Protože zřejmě

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{v}) + \lambda \mathbf{v}, \tag{84}$$

musí platit

$$\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{v}) \in \ker_\lambda(f) \tag{85}$$

viz druhá věta lineárního obalu. Ze stejného důvodu nyní položíme

$$\mathbf{v} = \mathrm{Rn}_\lambda(f). \tag{86}$$

Zopakováním celého postupu ověříme, že rovněž

$$\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{v}) \in \mathrm{Rn}_\lambda(f), \tag{87}$$

čímž je důkaz hotov.

Třetí věta Jordanova

$$\begin{gathered} \forall f : V \to V, \lambda_i \in \mathrm{Sp}(f) : V = \bigoplus_{i=1} \ker_{\lambda_i}(f), \\ f\left(\ker_\lambda(f)\right) \subseteq \ker_\lambda(f), \\ \mathrm{def}_{\lambda_i}(f) = \left|\{\lambda_i\}\right|, \end{gathered} \tag{88}$$

kde $\left|\{\lambda_i\}\right|$ označuje násobnost vlastní hodnoty λ_i operátoru *f*.

Důkaz

Nejprve si všimněme, že λ_1 již nepatří do spektra zúženého operátoru

$$f:\mathrm{Rn}_{\lambda_1}(f)\to\mathrm{Rn}_{\lambda_1}(f). \qquad (89)$$

Kdyby totiž bylo

$$\lambda_1\in\mathrm{Sp}(f):\mathrm{Rn}_{\lambda_1}(f)\to\mathrm{Rn}_{\lambda_1}(f), \qquad (90)$$

potom by platilo

$$\mathrm{Rn}_{\lambda_1}(f)=\mathrm{Rn}_{\lambda_1}(f)\oplus\ker_{\lambda_1}(f), \qquad (91)$$

což není možné, neboť

$$\ker_{\lambda_1}(f)\neq\{\mathbf{0}\}. \qquad (92)$$

Zvolíme si tedy nějaký další prvek spektra λ_2 a podle operátoru (89) rozložíme prostor

$$\mathrm{Rn}_{\lambda_1}(f)=\mathrm{Rn}_{\lambda_2}(f)\oplus\ker_{\lambda_2}(f), \qquad (93)$$

kde

$$\mathrm{Rn}_{\lambda_2}(f)=(\mathbf{f}-\lambda_2\mathbf{E})^{|\{\lambda_2\}|}\,\mathrm{Rn}_{\lambda_1}(f). \qquad (94)$$

Dle druhé Jordanovy věty jsme právě obdrželi rozklad prostoru *V*:

$$V=\ker_{\lambda_1}(f)\oplus\ker_{\lambda_2}(f)\oplus\mathrm{Rn}_{\lambda_2}(f). \qquad (95)$$

Ze stejného důvodu provedeme direktní rozklad prostoru $\mathrm{Rn}_{\lambda_2}(f)$ dle operátoru

$$f:\mathrm{Rn}_{\lambda_2}(f)\to\mathrm{Rn}_{\lambda_2}(f), \qquad (96)$$

čímž obdržíme

$$\mathrm{Rn}_{\lambda_2}(f) = \mathrm{Rn}_{\lambda_3}(f) \oplus \ker_{\lambda_3}(f). \tag{97}$$

Tímto způsobem postupujeme až do chvíle, než vyčerpáme všechny elementy spektra operátoru *f*. V tu chvíli však již $\mathrm{Rn}_{\lambda_j}(f) = \{\mathbf{0}\}$, kde *j* jsme označili počet navzájem různých elementů spektra *f*. Odtud již snadno plynou všechna dokazovaná tvrzení.

Důsledek třetí věty Jordanovy

Nechť $f : V \to V$ je libovolný operátor. Budiž

$$\begin{aligned} V &= \ker(f) \oplus \mathrm{Rn}(f), \\ f\big(\ker(f)\big) &\subseteq \ker(f), \\ f\big(\mathrm{Rn}(f)\big) &\subseteq \mathrm{Rn}(f). \end{aligned} \tag{98}$$

Nechť systém $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ generuje $\ker(f)$ a systém $\langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$ generuje $\mathrm{Rn}(f)$. Nechť $\mathbf{J}_1$ je matice $f : \ker(f) \to \ker(f)$ a $\mathbf{J}_i$ matice $f : \mathrm{Rn}(f) \to \mathrm{Rn}(f)$. Potom matice $f : V \to V$ má vzhledem k bázi $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m \rangle$ blokovou matici

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{J}_N \end{pmatrix}, \tag{99}$$

kde jednotlivé bloky $\mathbf{J}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N$ jsou tvaru

$$\mathbf{J}_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{100}$$

kde počet řádků $= \left|\{\lambda_i\}\right|$. Každou matici **A** lze potom vyjádřit pomocí podobné matice **J** výše uvedených vlastností, kterou nazýváme **Jordanovým kanonickým tvarem matice A**. Platí tedy

$$\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}. \tag{101}$$

Matice **C** má ve sloupcích vlastní vektory matice **A**, nebo v řádcích řetězené vektory v pořadí, jak to bylo popsáno v důkazu první věty Jordanovy.

Čtvrtá věta Jordanova

Nechť charakteristický polynom matice **A** má celkem *n* kořenů včetně násobných. Potom **A** je podobná matici **J** v Jordanově kanonickém tvaru, který určíme z kanonického tvaru charakteristické matice $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$ následovně:
Je-li

$$\begin{aligned} e_n(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_1}\cdots \\ e_{n-1}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_2}(\lambda - \lambda_2)^{l_2}\cdots \\ e_{n-2}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{k_3}(\lambda - \lambda_2)^{l_3}\cdots \\ \vdots \qquad & \qquad \vdots \end{aligned} \tag{102}$$

pak Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu λ_1 mají rozměry $k_1 \geq k_2 \geq \cdots$, Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu λ_2 mají rozměr $l_1 \geq l_2 \geq \cdots$, atd., pokud některá z mocnin není nulová.

Důkaz

Máme dokázat, že matice **A** a **J** jsou podobné právě tehdy, pokud $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ a $\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E}$ jsou ekvivalentní, tj. mají-li stejný kanonický tvar (stejné charakteristické polynomy $e_i(\lambda)$). Matice **J** má pak stejné charakteristické polynomy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ jako **A**.
Nechť tedy **A**, **J** jsou podobné. Potom $\mathbf{J}=\mathbf{CAC}^{-1},\ \lambda\mathbf{E}=\mathbf{C}(\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}^{-1}$.
Tedy

$$\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E}=\mathbf{C}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}^{-1}. \tag{103}$$

Protože každá regulární matice představuje posloupnost řádkových nebo sloupcových operací, je $\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E}$ ekvivalentní s $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$.
Obráceně, nechť $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}$ a $\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E}$ jsou ekvivalentní. Potom existují invertibilní matice $\mathbf{C}(\lambda)$ a $\mathbf{D}(\lambda)$ tak, že

$$\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E}=\mathbf{C}(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{D}(\lambda) \tag{104}$$

takové, že

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\lambda)&=(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}_1(\lambda)+\mathbf{C}_0,\\ \mathbf{D}(\lambda)&=\mathbf{D}_1(\lambda)(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})+\mathbf{D}_0,\end{aligned} \tag{105}$$

kde $\mathbf{C}_0$ a $\mathbf{D}_0$ nezávisejí na λ.
Použitím (103), (104), (105), dostaneme

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}_0(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_0=\left[\mathbf{C}(\lambda)-(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}_1(\lambda)\right](\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\left[\mathbf{D}(\lambda)-\mathbf{D}_1(\lambda)(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})\right]=\\ &=\mathbf{C}(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{D}(\lambda)-\mathbf{C}(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_1(\lambda)(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})-\\ &-(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}_1(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{D}(\lambda)+(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}_1(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_1(\lambda)(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})=\\ &=(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})-\mathbf{D}^{-1}(\lambda)\mathbf{D}_1(\lambda)(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})-(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}_1(\lambda)\mathbf{C}^{-1}(\lambda)(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})+\\ &+(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}_1(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_1(\lambda)(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})=\\ &=(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})\left\{\mathbf{E}-\left[\mathbf{D}^{-1}(\lambda)\mathbf{D}_1(\lambda)+\mathbf{C}_1(\lambda)\mathbf{C}^{-1}(\lambda)-\mathbf{C}_1(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_1(\lambda)\right](\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})\right\}.\end{aligned} \tag{106}$$

Kdyby výraz v hranaté závorce byl různý od nulové matice, byl by celý poslední výraz polynomem stupně alespoň 2, což ovšem není možné, neboť $\mathbf{C}_0\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{D}_0$ je stupně 1. Výraz v hranaté závorce je tudíž nulový a platí

$$\mathbf{C}_0\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right)\mathbf{D}_0=\left(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E}\right). \tag{107}$$

Porovnáním koeficientů u mocnin λ^0 a λ^1 dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_0\mathbf{A}\mathbf{D}_0&=\mathbf{J},\\ \mathbf{C}_0\mathbf{D}_0&=\mathbf{E}.\end{aligned} \tag{108}$$

Tedy vskutku platí

$$\mathbf{C}_0^{-1}=\mathbf{Q}_0, \tag{109}$$

odkud již

$$\mathbf{J}=\mathbf{C}_0\mathbf{A}\mathbf{C}_0^{-1}. \tag{110}$$

Důsledek čtvrté věty Jordanovy

Čtvrtá věta Jordanova umožňuje nalézt Jordanův kanonický tvar matice **A**, jestliže najdeme kanonický tvar **K**(λ) charakteristické matice **A** - λ**E**. S pomocí třetí věty pak rovněž matici podobnosti **C**, pro níž platí (101).

1) Nejdříve upravíme **A** - λ**E** elementárními úpravami na kanonický tvar **K**(λ):

$$\begin{pmatrix}\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \end{pmatrix}\sim\ldots\sim\begin{pmatrix}\mathbf{K}\left(\lambda\right) & \tilde{\mathbf{C}}\left(\lambda\right)\\ \tilde{\mathbf{D}}\left(\lambda\right) & \end{pmatrix}, \tag{111}$$

přičemž $\mathbf{K}\left(\lambda\right)=\tilde{\mathbf{C}}\left(\lambda\right)\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right)\tilde{\mathbf{D}}\left(\lambda\right)$.

2) Kanonický tvar $\mathbf{K}(\lambda)$ určuje Jordanovu matici $\mathbf{J}$. Její charakteristickou matici převedeme elementárními úpravami na kanonický tvar $\mathbf{K}(\lambda)$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}-\lambda\mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} \mathbf{K}(\lambda) & \bar{\mathbf{C}}(\lambda) \\ \bar{\mathbf{D}}(\lambda) & \end{pmatrix}. \qquad (112)$$

Platí $\mathbf{K}(\lambda)=\bar{\mathbf{C}}(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\bar{\mathbf{D}}(\lambda)$.

3) Z předchozích dvou rovnic dostaneme

$$\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E}=\bar{\mathbf{C}}^{-1}(\lambda)\tilde{\mathbf{C}}(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\tilde{\mathbf{D}}(\lambda)\bar{\mathbf{D}}^{-1}(\lambda). \qquad (113)$$

4) Položme

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\lambda)&=\bar{\mathbf{C}}^{-1}(\lambda)\tilde{\mathbf{C}}(\lambda), \\ \mathbf{D}(\lambda)&=\tilde{\mathbf{D}}^{-1}(\lambda)\bar{\mathbf{D}}(\lambda), \end{aligned} \qquad (114)$$

a vydělme obě rovnice (114) maticí $\mathbf{J}$ - $\lambda\mathbf{E}$. Dle důkazu čtvrté věty Jordanovy platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\lambda)&=(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}_1(\lambda)+\mathbf{C}_0, \\ \mathbf{D}(\lambda)&=\mathbf{D}_1(\lambda)(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})+\mathbf{D}_0, \end{aligned} \qquad (115)$$

neboli

$$\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E}=\mathbf{C}_0(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{D}_0, \qquad (116)$$

v důsledku čehož platí (109) a (110).

5) K získání matice $\mathbf{C}_0$ stačí do $\mathbf{C}(\lambda)$ dosadit matici $\mathbf{J}$ za λ zleva, k získání matice $\mathbf{D}_0$ pak dosadit matici $\mathbf{J}$ za λ v polynomu $\mathbf{D}(\lambda)$ zprava.

Příklad:

Nalezněte Jordanův kanonický tvar **J** matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (117)$$

a matici podobnosti $\mathbf{C}_0$ takovou, aby splňovala rovnost (110).

Řešení:

Provedeme elementární řádkové a sloupcové operace na matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}-\lambda\mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4-\lambda & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2+4\lambda-4 & 0 & \lambda-4 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda-2)^2 & 0 & \lambda-4 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & \lambda & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda & -1 & 0 & 1 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & 0 & 4-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & \lambda & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & (\lambda-2)^2 & (\lambda-2)^2 & 4-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 1 & \lambda & \lambda & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 & 4-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \lambda & & & \\ 0 & -1 & 1 & & & \end{pmatrix}. \tag{118}$$

Tedy kanonický tvar matice $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})$ je

$$\mathbf{K}(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 4-\lambda & -1 & 0\end{pmatrix}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & \lambda\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\tilde{\mathbf{C}}(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\tilde{\mathbf{D}}(\lambda), \qquad (119)$$

a Jordanův kanonický tvar matice **A** je

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}. \qquad (120)$$

Pro nalezení podobnostní matice $\mathbf{C}_0$ nyní provedeme elementární řádkové a sloupcové operace na matici

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{J}-\lambda\mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(2-\lambda)^2 & 0 & 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(2-\lambda)^2 & 0 & 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & \lambda-2 & 0 & & & \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 & 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & \lambda & -1 & & & \\ 1 & 0 & 2-\lambda & & & \end{pmatrix}.
$$

(121)

Tedy

$$
\mathbf{K}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E}) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =
$$

$$
= \overline{\mathbf{C}}(\lambda)(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})\overline{\mathbf{D}}(\lambda).
$$

(122)

Srovnáním (122) a (119) spočteme, že

$$\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E}=\bar{\mathbf{C}}^{-1}(\lambda)\tilde{\mathbf{C}}(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\tilde{\mathbf{D}}(\lambda)\bar{\mathbf{D}}^{-1}(\lambda)=\mathbf{C}(\lambda)(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{D}(\lambda). \qquad (123)$$

Přitom

$$\bar{\mathbf{C}}^{-1}(\lambda)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\2-\lambda&0&1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}(\lambda)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\2-\lambda&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\4-\lambda&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\6-2\lambda&-1&0\end{pmatrix}= \qquad (124)$$

$$=\lambda\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\6&-1&0\end{pmatrix}.$$

K získání matice $\mathbf{C}_0$ takové, že

$$\mathbf{C}(\lambda)=(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}_1(\lambda)+\mathbf{C}_0, \qquad (125)$$

Stačí do $\mathbf{C}(\lambda)$ dosadit za λ zleva matici $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{C}_0=\mathbf{J}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\6&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&0&0\\-4&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&0\\6&-1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&0&0\\2&-1&0\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_0^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-2&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

(126)

Výpočtem se lze snadno přesvědčit, že tyto matice vskutku splňují rovnost (110).

Definice relativní báze vektorového prostoru

O nenulových vektorech $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ řekneme, že jsou nezávislé vůči podprostoru $W \subseteq V$, pokud

$$\sum \lambda_i \mathbf{v}_i \in W \Rightarrow \forall \lambda_i = 0. \qquad (127)$$

Řekneme, že systém $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ dokonce tvoří bázi *V* vůči *W*, pokud navíc

$$L\left(\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \cup W\right) = V. \qquad (128)$$

Pozorování:

Absolutní nezávislost tedy znamená relativní nezávislost vzhledem k triviálnímu podprostoru $W = \{\mathbf{0}\}$, absolutní báze pak relativní bázi vůči tomuto podprostoru.

Definice invariantního podprostoru operátoru

Invariantním podprostorem operátoru $f : V \to V$ nazýváme podprostor $W \subseteq V$, pro který platí

$$f(W) \subseteq W. \qquad (129)$$

Pátá věta Jordanova

Každý operátor lze ve vhodné bázi vyjádřit trojúhelníkovou maticí.

Důkaz

Stačí sestrojit bázi $B = \left\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \right\rangle$ takovou, aby lineární obal každé k-tice vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ byl invariantním podprostorem. Máme-li zadaný řetězec invariantních podprostorů

$$V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_n \equiv V\,, \tag{130}$$

tj. máme-li zobrazení $f : V \to V$ takové, že

$$f\left(V_i\right) \subseteq V_i \tag{131}$$

a značí-li **A** jeho matici vůči postupně doplňované bázi, má **A** tvar, v němž se postupně zleva doprava snižuje nebo zachovává sloupec nul, jímž je zakončen každý sloupec matice **A**. Jedná se tedy o horní trojúhelníkovou matici, v níž jednotlivé elementy tvoří bloky odpovídající doplňujícím prvkům báze V_i vůči V_{i-1}, namísto čísel. Je-li specielně

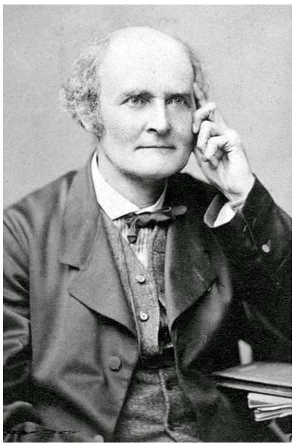
$$\dim V_i = \dim V_{i-1} + 1, \tag{132}$$

jsou bloky triviální.

Hamilton – Cayleyova věta

Nechť p je charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$. Potom $p(\mathbf{A}) = 0$

Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865)



Arthur Cayley (1821 – 1895)

Důkaz

Vyjdeme z direktního rozkladu

$$V = \bigoplus_i \ker_{\lambda_i} . \tag{133}$$

Víme, že

$$p(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{|\{\lambda_i\}|} . \tag{134}$$

Nechť $\mathbf{u} \in V$. Pišme

$$\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{v}_i , \tag{135}$$

kde $\mathbf{v}_i \in \ker_{\lambda_i}(\mathbf{A})$.

Jenomže

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^{|\{\lambda_i\}|} \mathbf{v}_i = \mathbf{0} . \tag{136}$$

Odtud plyne

$$p(\mathbf{A}) = \prod_i (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})^{|\{\lambda_i\}|}, \tag{137}$$

takže

$$p(\mathbf{A})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \tag{138}$$

a tedy rovněž

$$p(\mathbf{A})\mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{139}$$

Protože tato rovnost platí pro každé $\mathbf{u} \in V$, musí být vskutku

$$p(\mathbf{A}) = 0. \tag{140}$$

Stochastická matice

Definice stochastické matice

Stochastickou maticí nazýváme matici s jednotkovou sumou prvků v každém sloupci

Definice stacionárního stavu stochastické matice

Je-li matice **A** stochastická, potom vlastní vektor **v** příslušející jejímu spektrálnímu poloměru ρ nazýváme stacionárním stavem matice **A**.

Definice positivní matice

Positivní nazýváme každou matici, jejíž prvky jsou všechny nezáporné.

První věta Perron – Frobeniova

Nechť $\mathbf{A}$ je positivní matice, ρ její spektrální poloměr. Potom ρ je jednonásobná a kladná vlastní hodnota a pro libovolnou počáteční volbu kladného vektoru **x** platí

$$\mathbf{A}^{n+1}\mathbf{x} = \rho\mathbf{A}^{n}\mathbf{x} = \rho^{n+1}c\mathbf{v} + \rho\lambda^{n}, \tag{141}$$

kde λ je druhý největší prvek spektra operátoru **A**, *c* je konstanta závislá na volbě **x**, **v** je vlastní vektor příslušející spektrálnímu poloměru ρ.

Oskar Perron (1880 – 1975)

Ferdinand Georg Frobenius (1849 – 1917)

Důkaz

Důkaz stačí provést pro případ $\rho(\mathbf{A}) = 1$, neboť vezmeme-li matici

$$B = \rho^{-1}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} \tag{142}$$

platí

$$\rho(\mathbf{B}) = 1. \tag{143}$$

Nechť tedy $\rho(\mathbf{A}) = 1$ a nechť

$$\mathbf{Av} = \mathbf{v}. \tag{144}$$

Pišme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-, \tag{145}$$

kde

$$v_i^+ = \max\{v_i, 0\}. \tag{146}$$

Vzhledem k positivitě matice **A** jsou vektory $\mathbf{Av}^+$, $\mathbf{Av}^-$ rovněž positivní.
Zavedeme-li nyní vektor **w** předpisem

$$w_i = \min\left[\left(\mathbf{Av}^+\right)_i, \left(\mathbf{Av}^-\right)_i\right], \tag{147}$$

pak vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^+ &= \mathbf{Av}^+ - \mathbf{w}, \\ \mathbf{z}^- &= \mathbf{Av}^- - \mathbf{w}, \end{aligned} \tag{148}$$

jsou opět positivní. Pak ovšem platí

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-\right) = 2\mathbf{w} + \mathbf{z}^+ + \mathbf{z}^- = \mathbf{Av} + 2\mathbf{Av}^-. \tag{149}$$

Proto

$$\mathbf{v} = \mathbf{z}^+ + \mathbf{z}^-, \tag{150}$$

protože je ale každá souřadnice nulová vždy alespoň u jednoho z vektorů $\mathbf{z}^+, \mathbf{z}^-$, musí být dokonce.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^+ &= \mathbf{z}^+, \\ \mathbf{v}^- &= \mathbf{z}^-. \end{aligned} \tag{151}$$

Protože

$$2\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v}^{+} + \mathbf{A}\mathbf{v}^{-} + \mathbf{v}^{+} + \mathbf{v}^{-}, \qquad (152)$$

platí

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{v}^{+} + \mathbf{v}^{-}\right) = \mathbf{v}^{+} + \mathbf{v}^{-} + \mathbf{2w} \geq \left(1 + \rho\left(\mathbf{A}\right)\right)\left(\mathbf{v}^{+} + \mathbf{v}^{-}\right), \qquad (153)$$

což je možné pouze v triviálním případě $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, jinak by musela existovat vlastní hodnota větší, než 1. Existuje tedy jediný vektorový řetězec příslušející vlastní hodnotě $\lambda = 1$. Navíc se jedná o řetězec jednočlenný, neboť kdyby

$$\exists \mathbf{y} : \left(\mathbf{A} - \mathbf{E}\right)\mathbf{y} = \mathbf{v}, \left(\mathbf{A} - \mathbf{E}\right)\mathbf{v} = \mathbf{0} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{E}\right)^{n} \mathbf{y} \qquad (154)$$

kde $n \geq 2$, platilo by rovněž

$$\mathbf{A}^{n}\mathbf{y} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{E} + \mathbf{E}\right)^{n} \mathbf{y} = \mathbf{y} + n\mathbf{v}, \qquad (155)$$

což však není možné, neboť posloupnost $\mathbf{A}^{n}\mathbf{y}$ je omezená, kdežto posloupnost $\mathbf{y} + n\mathbf{v}$ je pro $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ neomezená.

Poznámka:

dá se ukázat, že je-li matice **A** stochastická, platí

$$\begin{aligned} &\rho\left(\mathbf{A}\right) = 1, \\ &c = \sum_{i} x_i. \end{aligned} \qquad (156)$$

Důsledek první věty Perron – Frobeniovy

Nechť ρ je spektrální poloměr positivní matice **A**. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(\rho^{-1}\mathbf{A}\right)^{n} = \mathbf{D\Pi D'}, \qquad (157)$$

kde **D**, **D´** jsou vhodné positivní diagonální matice a $\mathbf{\Pi}$ je matice, jejíž všechny prvky tvoří jedničky. Dále platí

$$\sum_{i=1}^{m} d_i^i d_i'^i = 1, \qquad (158)$$

kde *m* je řád matice **A**. Vlastní vektor příslušný $\rho(\mathbf{A})$ je tvaru

$$v = \begin{pmatrix} d_1^1 \\ \vdots \\ d_m^m \end{pmatrix}. \qquad (159)$$

Je-li **A** symetrická, pak **D** = **D´**, takže

$$\sum_{i=1}^{m}\left(d_i^i\right)^2 = 1. \qquad (160)$$

Je-li **A** stochastická, pak

$$d_i'^i = \left(\sum_{i=1}^{m} d_i^i\right)^{-1}, \qquad (161)$$

tzn.

$$\mathbf{A}^n \lim_{n\to\infty}\mathbf{A}^n = d_i'^i \mathbf{D\Pi}. \qquad (162)$$

Konečně, pro symetrickou stochastickou matici **A** dostáváme rovnost

$$d_i^i = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} d_i^i} = \frac{1}{\sqrt{m}}. \tag{163}$$

Druhá věta Perron – Frobeniova

Nechť **A** je stochastická matice a nechť existuje diagonální matice **Q** taková, že matice **AQ** je symetrická. Potom řešení rovnice

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{u} \tag{164}$$

je tvaru

$$\mathbf{u} = c \cdot \mathbf{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{165}$$

kde c je vhodná konstanta.

Důkaz

Je-li **AQ** symetrická, pak

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \tag{166}$$

a rovněž

$$\mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{Q}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}, \tag{167}$$

odkud obecně plyne

$$\mathbf{A}^n\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^n. \tag{168}$$

Proto je i matice $\mathbf{A}^n\mathbf{Q}$ symetrická. Díky stochasticitě **A** plyne z první věty Perron – Frobeniovy

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{A}^n = \mathbf{P\Pi}\,, \qquad (169)$$

kde **P** je diagonální s jednotkovou stopou. Díky symetrii $\mathbf{A}^n\mathbf{Q}$ navíc platí

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{A}^n\mathbf{Q} = \mathbf{D\Pi D}\,. \qquad (170)$$

Odtud, srovnáním (169) a (170) vidíme, že

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q} = \mathbf{P}\,, \qquad (171)$$

takže

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^n\mathbf{u} \to \mathbf{P\Pi u} = \mathbf{Q\Pi u}\left(1,1,\cdots,1\right)^{\mathsf{T}} = c\cdot\mathbf{Q}\left(1,1,\cdots,1\right)^{\mathsf{T}}. \qquad (172)$$

Exponenciela matice

Definice exponenciely matice

$$\exp\mathbf{A} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!} \qquad (173)$$

Definice normy matice

$$\left\|\mathbf{A}\right\| = \max_{i,j}\left\{\left|a_{ij}\right|\right\}. \qquad (174)$$

Definice metriky na prostoru čtvercových matic

$$d\left(\mathbf{A},\mathbf{A}'\right) = \left\|\mathbf{A}-\mathbf{A}'\right\|. \qquad (175)$$

První věta o konvergenci

Je-li řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{A}_n\| \tag{176}$$

konvergentní, konverguje i řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n \tag{177}$$

v každém bodě matice a platí

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{A}_n\|. \tag{178}$$

Důkaz

Je zřejmé, že

$$\mathbf{A}_n \leq \|\mathbf{A}_n\|, \tag{179}$$

neboli

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{A}_n\|. \tag{180}$$

Dále

$$-\mathbf{A}_n \leq \|-\mathbf{A}_n\| = \|\mathbf{A}_n\|, \tag{181}$$

takže

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{A}_n \le \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\mathbf{A}_n\right\|. \qquad (182)$$

Proto

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{A}_n\right\| = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{A}_n \vee \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{A}_n\right\| = -\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{A}_n\,, \qquad (183)$$

čili skutečně platí (178).

Druhá věta o konvergenci

$$\left\|\mathbf{A}^n\right\| \le k^{n-1}\left\|\mathbf{A}^n\right\|, \qquad (184)$$

kde k je řád matice **A**.

Důkaz

Pro n = 1 z (184) plyne

$$\left\|\mathbf{A}\right\| \le \left\|\mathbf{A}\right\|, \qquad (185)$$

čemuž uvěří mnozí. Je-li a_{ij}^n prvkem matice $\mathbf{A}^n$, platí

$$\left|a_{ij}^n\right| \le \sum_{l=1}^{k}\left|a_{il}\right|\left|a_{lj}^{n-1}\right| \le k\left\|\mathbf{A}\right\| \cdot k^{n-2}\left\|\mathbf{A}\right\|^{n-1} = k^{n-1}\left\|\mathbf{A}\right\|^n. \qquad (186)$$

Definice komutátoru

Výraz

$$\left[\mathbf{A};\mathbf{B}\right] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA}\,. \qquad (187)$$

nazýváme komutátorem matic **A** a **B**. Specielně, je-li $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, říkáme, že matice **A**, **B** navzájem komutují, což znamená, že

$$\left[\mathbf{A};\mathbf{B}\right]=\mathbf{0}. \tag{188}$$

Definice antikomutátoru

Výraz

$$\left\{\mathbf{A};\mathbf{B}\right\}\equiv\mathbf{AB}+\mathbf{BA}. \tag{189}$$

nazýváme antikomutátorem matic **A** a **B**. Specielně, je-li $\mathbf{AB}=-\mathbf{BA}$, říkáme, že matice **A**, **B** navzájem antikomutují, což znamená, že

$$\left\{\mathbf{A};\mathbf{B}\right\}=0. \tag{190}$$

První věta exponenciely

Pokud spolu matice **A** a **B** navzájem komutují, pak

$$\exp\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)=\exp\mathbf{A}\cdot\exp\mathbf{B}=\exp\mathbf{B}\cdot\exp\mathbf{A}. \tag{191}$$

Důkaz

Užijeme substituci $m=p-n$. Potom

$$\begin{aligned}\exp\mathbf{A}\cdot\exp\mathbf{B}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{B}^m}{m!}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{0\le n\le p}\frac{\mathbf{A}^n\mathbf{B}^{p-n}}{n!\left(p-n\right)!}=\\&=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(\sum_{0\le n\le p}\frac{p!\mathbf{A}^n\mathbf{B}^{p-n}}{n!\left(p-n\right)!}\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)^p.\end{aligned} \tag{192}$$

Povšimněme si, že poslední úprava binomické formule je možná pouze tehdy, když spolu matice **A, B** komutují.

Pozorování:

$\exp \mathbf{A}$ je vždy regulární maticí, pro kterou platí

$$(\exp \mathbf{A})^{-1} = \exp(-\mathbf{A}). \quad (193)$$

Zobecnění:

Vzorec pro exponencielu součtu lze modifikovat i pro případ, že **A**, **B** navzájem nekomutují, ale obě komutují se svým komutátorem $[\mathbf{A};\mathbf{B}]$, tj.

$$[\mathbf{A};[\mathbf{A};\mathbf{B}]] = [[\mathbf{A};\mathbf{B}];\mathbf{B}]. \quad (194)$$

Potom platí:

$$\exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} = \exp\left(\mathbf{A} + \frac{1}{2}[\mathbf{A};\mathbf{B}] + \mathbf{B} \right) = \exp(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}[\mathbf{A};\mathbf{B}] \right). \quad (195)$$

Druhá věta exponenciely

$$\exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} \cdot \exp(-\mathbf{A}) = \exp(\exp \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \exp(-\mathbf{A})). \quad (196)$$

Důkaz

Z první věty exponenciely víme, že pokud **A** i **B** komutují, se svým komutátorem, platí (195). Dosazením z této rovnice za daných předpokladů plyne

$$\exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} \cdot \exp(-\mathbf{A}) \cdot \exp(-\mathbf{B}) = \exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} =$$
$$= \exp(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}[\mathbf{A};\mathbf{B}] \right) \exp - (\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}[\mathbf{A};\mathbf{B}] \right) =$$
$$= \exp[\mathbf{A};\mathbf{B}]. \quad (197)$$

Odtud

$$\exp\mathbf{A}\cdot\exp\mathbf{B}\cdot\exp(-\mathbf{A})=\exp[\mathbf{A};\mathbf{B}]\cdot\exp\mathbf{B}, \tag{198}$$

což lze přepsat jako

$$\exp\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\cdot\exp(-\mathbf{A})=\exp[\mathbf{A};\mathbf{B}]\cdot\mathbf{C} \tag{199}$$

a proto

$$\exp[\mathbf{A};\mathbf{B}]\cdot\exp\mathbf{B}=\exp\left(\exp\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\exp(-\mathbf{A})\right)=\exp\mathbf{A}\cdot\exp\mathbf{B}\cdot\exp(-\mathbf{A}). \tag{200}$$

Poznámka:

Tento vztah užíváme k výpočtu exponenciely matice **M** vyjádřené jako

$$\mathbf{M}=\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \tag{201}$$

s podobnou maticí **B** pokud možno v Jordanově tvaru. Potom tedy platí:

$$\exp\mathbf{M}=\exp\left(\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\right)=\mathbf{D}\cdot\exp\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}^{-1}. \tag{202}$$

Důsledek

$$\exp\mathbf{A}\exp\mathbf{B}\exp(-\mathbf{A})=$$
$$=\exp\left(\mathbf{B}+\frac{1}{1!}[\mathbf{A};\mathbf{B}]+\frac{1}{2!}\big[\mathbf{A};[\mathbf{A};\mathbf{B}]\big]+\frac{1}{3!}\Big[\mathbf{A};\big[\mathbf{A};[\mathbf{A};\mathbf{B}]\big]\Big]+\cdots\right). \tag{203}$$

Třetí věta exponenciely

Nechť $\mathbf{A}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$. Potom

$$(\exp\mathbf{A})\,\mathbf{v}=(\exp\lambda)\,\mathbf{v} \tag{204}$$

Důkaz

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}\right)\mathbf{v}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\mathbf{v}}{n!}=e^{\lambda}\mathbf{v}\,. \qquad (205)$$

Čtvrtá věta exponenciely

Nechť

$$\mathbf{A}=\mathbf{CDC}^{-1}. \qquad (206)$$

Pak

$$\exp\mathbf{A}=\mathbf{C}\exp\left(\mathbf{DC}^{-1}\right). \qquad (207)$$

Důkaz

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\mathbf{CDC}^{-1}\right)^n}{n!}=\mathbf{C}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{D}^n}{n!}\mathbf{C}^{-1}. \qquad (208)$$

Důsledek

$$\exp\mathbf{A}=\mathbf{C}\begin{pmatrix} e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e \end{pmatrix}\mathbf{C}^{-1}, \qquad (209)$$

kde matice **C** má ve sloupcích souřadnice vlastních vektorů.

Pátá věta exponenciely

Jsou-li reálné části vlastních hodnot matice **A** kladné, potom platí:

$$\mathbf{A}^{-1} = \int_0^\infty \exp(-t\mathbf{A})\,dt\,. \tag{210}$$

Důkaz

Obě strany dokazované rovnosti vynásobíme zleva maticí –**A**, čímž postupně dostaneme

$$\begin{aligned}-\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \int_0^\infty -\mathbf{A}\exp(-t\mathbf{A})\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\exp(-t\mathbf{A})\,dt = \left[\exp(-t\mathbf{A})\right]_0^\infty = \\ &= \mathbf{0} - \mathbf{E} = -\mathbf{E}.\end{aligned} \tag{211}$$

Poznámka:

Výše uvedený předpoklad o vlastních hodnotách zajišťuje exponenciálně rychlé ubývání integrandu.

První věta o vztahu tracku s determinantem

Nechť $\mathbf{O}(t)$ označuje matici, jejíž všechny prvky jsou nějaké funkce $O(t)$ takové, že

$$\lim_{t\to 0}\frac{O(t)}{t} = 0\,. \tag{212}$$

Potom v limitě $t \to 0$ platí

$$\det\exp(t\mathbf{A}) = 1 + \operatorname{tr}\mathbf{A} + O(t). \tag{213}$$

Důkaz

Snadno ověříme, že pro libovolnou matici **A** platí

$$\exp(t\mathbf{A}) = \mathbf{E} + t\mathbf{A} + \mathbf{O}(t). \tag{214}$$

Dále si uvědomíme, že neidentické permutace přispějí k determinantu polynomem, z něhož lze vytknout *t*. Tento polynom po vytknutí *t* označíme *P* a provedeme následující úpravy:

$$\begin{aligned}\det\left(\mathbf{E} + t\mathbf{A} + \mathbf{O}(t)\right) &= \sum_{\pi} (-1)^{s_p} \prod_{j=1}^{n} \left(\delta_j^{p(j)} + ta_j^{p(j)} + O_j^{p(j)}(t)\right) = \\ &= \prod_{j=1}^{n} \left(1 + ta_j^j + O_j^j(t)\right) + tP = \mathbf{E} + t \cdot \operatorname{tr} \mathbf{A} + \mathbf{O}(t).\end{aligned} \tag{215}$$

Druhá věta o vztahu tracku s determinantem

$$\det \exp \mathbf{A} = \exp \operatorname{tr} \mathbf{A}. \tag{216}$$

Důkaz

Označme

$$f(t) = \det \exp(t\mathbf{A}). \tag{217}$$

Zřejmě platí

$$\begin{aligned}\frac{df(t)}{dt} &= \lim_{h\to 0} \frac{\det \exp\left((t+h)\mathbf{A}\right) - \det \exp(t\mathbf{A})}{\mathbf{h}} = \\ &= \det \exp(t\mathbf{A}) \lim_{h\to 0} \frac{\det \exp(h\mathbf{A}) - 1}{h} = \\ &= \det \exp(t\mathbf{A}) \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot \operatorname{tr} \mathbf{A} + O(h)}{h} = \operatorname{tr} \mathbf{A}\, f(t).\end{aligned} \tag{218}$$

Jsme u cíle, neboť diferenciální rovnice

$$f'(t) = \operatorname{tr}\mathbf{A}\, f(t) \tag{219}$$

má řešení

$$f(t) = c \cdot \exp t \cdot \operatorname{tr}\mathbf{A}, \tag{220}$$

kde

$$c = f(0) = 1. \tag{221}$$

Třetí věta o vztahu tracku s determinantem

$$\ln\det(\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tr}\mathbf{A}^n}{n} \tag{222}$$

Důkaz

Nejprve provedeme Taylorův rozvoj funkce $\ln x$:

$$\ln x = \ln x_0 + \frac{(x - x_0)}{x_0} - \frac{(x - x_0)^2}{2!x_0^2} + \frac{2(x - x_0)^3}{3!x_0^3} - \cdots + \frac{n!(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!x_0^{n+1}}. \tag{223}$$

Položíme-li $x_0 = 1$, máme

$$\ln x = 0 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!(x-1)^{n+1}}{(n+1)n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}. \tag{224}$$

Provedeme substituci $\mathbf{E} - \mathbf{A} = \exp\mathbf{B}$ a z předchozí věty ihned dostáváme rovnost

$$\ln\det(\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \ln\det\exp\mathbf{B} = \ln\exp\operatorname{tr}\mathbf{B} = \operatorname{tr}\mathbf{B}. \tag{225}$$

A protože

$$\mathbf{B} = \ln\left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\right), \tag{226}$$

plyne odtud

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\mathbf{B} &= \operatorname{tr}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{\left(\mathbf{E}-\mathbf{A}+1\right)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{\operatorname{tr}\left(\mathbf{E}-\mathbf{A}+1\right)^{n+1}}{n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{\operatorname{tr}\left(-\mathbf{A}\right)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{tr}\mathbf{A}^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{tr}\mathbf{A}^{n}}{n}. \end{aligned} \tag{227}$$

Gaussova věta

Nechť $\hat{\mathbf{T}}^k$ je operátor translace o k, tzn

$$\left(\hat{\mathbf{T}}^k f\right)_n = f_{n+k}\,. \tag{228}$$

Potom platí vztah

$$\exp\left(t\Delta\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k\left(t\right)\hat{\mathbf{T}}^k\,, \tag{229}$$

kde posloupnost F s časově proměnnými prvky $F_k\left(t\right)$ řeší diferenciální rovnici

$$F'\left(t\right) = \Delta F\left(t\right) \tag{230}$$

při počáteční podmínce

$$F_k\left(0\right) = \delta_{k_0}\,. \tag{231}$$

Důkaz

Protože Laplaceův operátor Δ komutuje s každým $\hat{\mathbf{T}}^k$, vyplývá z platnosti rovnice (230) vskutku

$$\frac{d}{dt}\exp(t\Delta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\Delta F(t)\right)_k\hat{\mathbf{T}}^k=\Delta\sum_{k\in\mathbb{Z}}F_k(t)\hat{\mathbf{T}}^k. \qquad (232)$$

Logaritmus matice

Hledejme matici **A** takovou, že pro zadanou regulární matici **B** platí

$$\exp\mathbf{A}=\mathbf{B}. \qquad (233)$$

Pomocí Taylorova rozvoje pro logaritmus, okamžitě získáme rovnost

$$\mathbf{A}=\ln\mathbf{B}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\mathbf{B}-\mathbf{E})^{n+1}}{n+1} \qquad (234)$$

pro logaritms matice **B.**

Úvod do teorie duálních prostorů

Definice duálního prostoru

Duálním prostorem k prostoru V rozumíme prostor všech lineárních forem, tj. lineárních zobrazení přiřazujících prvkům V prvek z tělesa, nad kterým je prostor V sestrojen.
Duální prostor budeme značit V' a rovněž jeho prvky budeme psát čárkovaně.
Sčítání a násobení prvkem z tělesa zde definujeme nejpřirozenějším způsobem:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}'+\mathbf{v}')(\mathbf{w})&=\mathbf{u}'(\mathbf{w})+\mathbf{v}'(\mathbf{w}),\\(\lambda\mathbf{u})(\mathbf{w})&=\lambda\mathbf{u}'(\mathbf{w}).\end{aligned} \qquad (235)$$

Poznámka:

Odpovídající objekty duálu označujeme předponou „kontra“. Naopak, pokud jsme již pojmenovali objekty ve *V´*, používáme pro označení odpovídajících objektů z *V* předponu „ko“. V této sekci budeme používat konvenci horních a dolních indexů, přičemž horní index udává číslo řádku, kdežto dolní index číslo sloupce.
V duálním prostoru je pak přirozené použít přesně opačný zápis oproti prostoru původnímu. Budeme tedy značit $\mathbf{v}'^i$ prvky duální báze k bázi $\mathbf{v}_j$ tak, že

$$\mathbf{v}'^i \mathbf{v}_j = \delta^i_j . \qquad (236)$$

Věta o duální bázi

i-tou souřadnici vektoru **x** vůči bázi $\langle \mathbf{e}_j \rangle$ lze interpretovat jako hodnotu *i*-tého prvku duální báze (jakožto formy) v bodě **x**, tj.

$$\mathbf{x} = \sum \mathbf{v}_i x^i \Rightarrow x^i = \mathbf{v}'^i (\mathbf{x}) . \qquad (237)$$

Důkaz

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'\left(\sum \mathbf{v}_i x^i\right) &= \sum \mathbf{v}'\mathbf{v}_i x^i = \sum y_i x^i = \left(\sum y_j \mathbf{v}'^j\right)\left(\sum \mathbf{v}_i x^i\right) = \\ &= \left(\sum y_j \mathbf{v}'^j\right)\mathbf{v} = \mathbf{v}'\mathbf{v}. \end{aligned} \qquad (238)$$

Věta o změně duální báze

Nechť **C** je matice přechodu od báze $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ k bázi $\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \rangle$, tj. platí

$$\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle \cdot \mathbf{C} . \qquad (239)$$

Potom lze vztah mezi duálními bázemi vyjádřit formulí

$$\begin{pmatrix} w'^1 \\ \vdots \\ w'^n \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^n \end{pmatrix}. \tag{240}$$

Důkaz

Definujme násobení $\mathbf{w}'\mathbf{w}$ jako $w'(\mathbf{w})$ a pišme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}'^1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}'^n \end{pmatrix} (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n) = \mathbf{E} = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{v}'^1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}'^n \end{pmatrix} (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \mathbf{C}. \tag{241}$$

Poznámka:

Kdybychom psali jednotlivé prvky duální báze vedle sebe, stejně jako v bázi původní, potom matice přechodu od báze $\left\langle \mathbf{v}'^1, \ldots, \mathbf{v}'^n \right\rangle$ k bázi $\left\langle \mathbf{w}'^1, \ldots, \mathbf{w}'^n \right\rangle$ je tzv. kontragradientní maticí $\mathbf{C}^{-1\mathsf{T}}$ k matici **C**, tj. platí

$$\left\langle \mathbf{w}'^1, \ldots, \mathbf{w}'^n \right\rangle = \left\langle \mathbf{v}'^1, \ldots, \mathbf{v}'^n \right\rangle \cdot \mathbf{C}^{-1\mathsf{T}}. \tag{242}$$

Věta o reprezentaci

$$\forall \mathbf{v}' \in V' \exists! \mathbf{v} \in V : \left(\forall \mathbf{w} \in V : v'(\mathbf{w}) = [\mathbf{w}, \mathbf{v}] \right), \tag{243}$$

kde vektor **v** tvoří tzv. **reprezentující prvek**.

Důkaz

Nechť

$$\ker(v') = \left\{ \mathbf{w} \middle| v'(\mathbf{w}) = 0 \right\} \tag{244}$$

je nulový prostor $\mathbf{v}'$. Nechť dále

$$\mathbf{v} \perp \ker(v') \tag{245}$$

(mimo jiné, $\ker^{\perp}(v')$ je jednorozměrný). Vektor **v** lze pak volit takový, aby

$$v'(\mathbf{w}) = [\mathbf{w}, \mathbf{v}]. \tag{246}$$

Forma

$$\{\mathbf{w} \to [\mathbf{w}, \mathbf{v}]\} \tag{247}$$

má proto stejný nulový prostor jako $\mathbf{v}'$. Navíc obě formy nabývají stejných hodnot i pro **v**, takže musí být totožné i na

$$V = L\langle \mathbf{v}, \ker(v')\rangle. \tag{248}$$

Definice duálního zobrazení

Mějme lineární zobrazení $f : V \to W$. Potom zobrazení

$$f' : W' \to V' \{\mathbf{w}' \to \mathbf{w}' \circ \mathbf{f}\} \tag{249}$$

nazveme zobrazením duálním k *f*. Přitom platí

$$[\mathbf{f}'(\mathbf{w}')](\mathbf{v}) = [\mathbf{w}'; \mathbf{A}\mathbf{v}] = [\mathbf{w}'\mathbf{A}; \mathbf{v}], \tag{250}$$

kde **A** je matice zobrazení *f* vůči bázím $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$ resp. $\langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$

Hlavní pozorování

Píšeme-li souřadnice duálního vektoru do řádky, máme pro duální zobrazení tutéž matici vůči bázím $\left\langle \mathbf{w}'^1, \dots, \mathbf{w}'^n \right\rangle$ resp. $\left\langle \mathbf{v}'^1, \dots, \mathbf{v}'^m \right\rangle$ jako původní zobrazení, tj. platí

$$f' : \mathbf{w}' \to \mathbf{w}'\mathbf{A}. \tag{251}$$

Pokud bychom ovšem psali souřadnice do sloupce i v duálním prostoru, bude mít zobrazení matici transponovanou:

$$f' : \mathbf{w}'^{\mathsf{T}} \to \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{w}'^{\mathsf{T}}. \tag{252}$$

Z toho důvodu také často hovoříme o duálním zobrazení jako o zobrazení transponovaném.

Věta o reprezentaci komplexního čísla maticí

Množina komplexních čísel je izomorfní množině matic dimenze 2×2 tvaru

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{253}$$

Důkaz

Snadno ověříme, že se skutečně jedná o izomorfismus: nechť jsou dána komplexní čísla

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + b_1 i, \\ z_2 &= a_2 + b_2 i. \end{aligned} \tag{254}$$

Potom

$$z_1 + z_2 \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i = z_1 + z_2,$$

$$z_1 \cdot z_2 \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -(a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ b_1 a_2 + b_2 a_1 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i = z_1 \cdot z_2. \tag{255}$$

Definice konjungované matice

Nechť je dána komplexní matice **C**. Nahradíme-li všechny její prvky elementy k nim komplexně sdruženými, získáme tzv. konjungovanou matici k matici **C**.

Poznámka

Uvědomme si, že v případě komplexní matice neznamená transpozice pouhou záměnu řádkových a sloupcových indexů jejích elementů, ale současné utvoření komplexního konjugátu matice vzniklé touto záměnou indexů.

Příklad:

$$\begin{pmatrix} x_{11} + y_{11} i & x_{12} + y_{12} i \\ x_{21} + y_{21} i & x_{22} + y_{22} i \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & -y_{11} \\ y_{11} & x_{11} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_{21} & -y_{21} \\ y_{21} & x_{21} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{12} & -y_{12} \\ y_{12} & x_{12} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_{22} & -y_{22} \\ y_{22} & x_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & y_{11} \\ -y_{11} & x_{11} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_{21} & y_{21} \\ -y_{21} & x_{21} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{12} & y_{12} \\ -y_{12} & x_{12} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_{22} & y_{22} \\ -y_{22} & x_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} - y_{11} i & x_{21} - y_{21} i \\ x_{12} - y_{12} i & x_{22} - y_{22} i \end{pmatrix}. \tag{256}$$

Definice antilineárního zobrazení

Nechť V je Hilbertův prostor. Definujme zobrazení $j : V \to V'$ vztahem

$$\left[\mathbf{j}(\mathbf{v})\right](\mathbf{u}) = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]. \qquad (257)$$

Toto zobrazení, které, jak snadno ověříme, splňuje nerovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{j}(\mathbf{v}_1) + \mathbf{j}(\mathbf{v}_2), \\ \mathbf{j}(\lambda \mathbf{v}) &= \bar{\lambda}\, \mathbf{j}(\mathbf{v}), \end{aligned} \qquad (258)$$

nazveme antilineárním zobrazením.

Definice hermitovsky sdruženého zobrazení

Charles Hermite (1822 – 1901)

Hermitovsky sdruženým zobrazením nazveme zobrazení

$$f^* = j^{-1} \circ f' \circ j\,. \qquad (259)$$

Věta o hermitovsky sdruženém zobrazení

Každé Hermitovsky sdružené zobrazení f^* splňuje rovnost

$$\left[\mathbf{f}\left(\mathbf{v}\right),\mathbf{w}\right]=\left[\mathbf{v},\mathbf{f}^*\left(\mathbf{w}\right)\right] \tag{260}$$

Hermitovsky sdružené zobrazení má v téže bázi hermitovsky sdruženou matici

$$\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}. \tag{261}$$

Důkaz

Nechť $\left\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \right\rangle$ je ortogonální báze V a nechť $f^* = j^{-1} \circ f' \circ j$ je hermistovsky sdružený operátor k $f : V \to V$, kde $\mathbf{j}\left(\mathbf{v}\right)$ je antilineární zobrazení. Nejprve dokážeme ekvivalenci

$$f^* = j^{-1} \circ f' \circ j \Leftrightarrow \left[\mathbf{f}\left(\mathbf{v}\right),\mathbf{w}\right]=\left[\mathbf{v},\mathbf{f}^*\left(\mathbf{w}\right)\right]. \tag{262}$$

Vskutku

$$\left[\mathbf{v},\mathbf{f}^*\left(\mathbf{w}\right)\right]=\left[\mathbf{j}\left(\mathbf{f}^*\left(\mathbf{w}\right)\right)\right]\left(\mathbf{v}\right)=\left[\mathbf{f}'\left(\mathbf{j}\left(\mathbf{w}\right)\right)\right]\left(\mathbf{v}\right), \tag{263}$$

právě když

$$jf^* = f'j, \tag{264}$$

neboli

$$f^* = j^{-1} \circ f' \circ j. \tag{265}$$

Dále platí

$$\left[\mathbf{f}'\left(\mathbf{j}\left(\mathbf{w}\right)\right)\right]\left(\mathbf{v}\right)=\mathbf{j}\left(\mathbf{w}\right)\left(\mathbf{f}\left(\mathbf{v}\right)\right)=\left[\mathbf{f}\left(\mathbf{v}\right),\mathbf{w}\right]. \tag{266}$$

Je-li

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}_i) = \sum \mathbf{v}_j a_i^j,$$
$$\mathbf{f}^*(\mathbf{v}_k) = \sum \mathbf{v}_j b_k^j, \tag{267}$$

potom

$$\left[\mathbf{f}(\mathbf{v}_i), \mathbf{v}_k\right] = \sum_j a_i^j \left[\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k\right] = a_i^k \left[\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k\right],$$
$$\left[\mathbf{v}_i, \mathbf{f}^*(\mathbf{v}_k)\right] = \sum_j \overline{b}_k^j \left[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right] = b_k^i \left[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\right], \tag{268}$$

neboli,

$$b_k^i = \overline{a}_i^k = a^{*i}{}_k, \tag{269}$$

Čímž je dokázána druhá část tvrzení.

Věta o determinantu komplexní matice

Nechť $\tilde{\mathbf{C}}$ označuje matici typu $2n \times 2n$, která vznikne z komplexní matice $\mathbf{C}$ dimenze $n \times n$ náhradou jejích elementů submaticemi. Potom

$$\det \tilde{\mathbf{C}} = \left|\det \mathbf{C}\right|^2. \tag{270}$$

Důkaz

Provedeme substituci $\mathbf{C} = \exp \mathbf{L}$, a díky izomorfnosti můžeme psát

$$\tilde{\mathbf{C}} = \exp \tilde{\mathbf{L}}. \tag{271}$$

Nyní už jen stačí dopočítat

$$\det\exp\tilde{\mathbf{L}} = \exp\operatorname{tr}\tilde{\mathbf{L}} = \exp\left(\operatorname{tr}\mathbf{L}\right)\cdot\exp\left(\overline{\operatorname{tr}\mathbf{L}}\right) = \det\exp\mathbf{L}\cdot\left(\overline{\det\exp\mathbf{L}}\right) =$$
$$= \left|\det\exp\mathbf{L}\right|^2 . \qquad (272)$$

Pozorování:

Stojí za povšimnutí, že platí rovnost

$$\tilde{\mathbf{C}}^* = \tilde{\mathbf{C}}^{\mathsf{T}} . \qquad (273)$$

Věta o kanonickém izomorfismu hermitovských operátorů

$$f^{**} = f \qquad (274)$$

Důkaz

$$\left[\mathbf{f}(\mathbf{u}),\mathbf{v}\right] = \left[\mathbf{u},\mathbf{f}^*(\mathbf{v})\right] = \left[\mathbf{f}^*(\mathbf{v}),\mathbf{u}\right] = \left[\mathbf{v},\mathbf{f}^{**}(\mathbf{u})\right] = \left[\mathbf{f}^{**}(\mathbf{u}),\mathbf{v}\right]. \qquad (275)$$

Věta o součinu hermitovských operátorů

$$(fg)^* = g^* f^* . \qquad (276)$$

Důkaz

$$\left[\mathbf{f}\left(\mathbf{g}(\mathbf{u})\right),\mathbf{v}\right] = \left[\mathbf{g}(\mathbf{u}),\mathbf{f}^*(\mathbf{v})\right] = \left[\mathbf{u},\mathbf{g}^*\left(\mathbf{f}^*(\mathbf{v})\right)\right]. \qquad (277)$$

Při prvé úpravě nakládáme jako s normálním vektorem s $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ a ve druhé zase s $\mathbf{f}^*(\mathbf{v})$.

Definice

Operátor *f* nazveme

a) Hermitovským (samosdruženým), pokud $f^* = f$,

b) Antihermitovským, pokud $f^* = -f \Leftrightarrow (fi)^* = (fi)$

c) Unitárním, pokud $f^* = f^{-1}$

d) Normálním, pokud $ff^* = f^* f$

Prvé adjektivum přechází v reálném prostoru na „symetrický“, druhé na „antisymetrický“, třetí na „ortogonální“.

Exponenciela antihermitovského operátoru

Exponenciela antihermitovského operátoru je unitárním operátorem

Důkaz

$$f^* = -f \Rightarrow (\exp f)^* = \exp(-f) = (\exp(f))^{-1}. \qquad (278)$$

Hlavní věta duality

Libovolnou matici $\mathbf{B} \in \mathbf{C}(m \times n)$ lze psát právě jedním způsobem ve tvaru

$$\mathbf{B} = \mathbf{S} + \mathbf{W}, \qquad (279)$$

kde **S** je nějaká hermitovská a **W** nějaká antihermitovská matice.

Důkaz

Nejprve ukážeme existenci nejvýše jednoho takového vyjádření:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B}^* = (\mathbf{S} + \mathbf{W})^* = \mathbf{S}^* + \mathbf{W}^* = \mathbf{S} - \mathbf{W}, \\
&\mathbf{B} = \mathbf{S} + \mathbf{W}, \\
&\mathbf{B} + \mathbf{B}^* = 2\mathbf{S}\,; \quad \mathbf{B} - \mathbf{B}^* = 2\mathbf{W},
\end{aligned} \qquad (280)$$

odkud

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*\right); \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} - \mathbf{B}^*\right). \tag{281}$$

Nyní ukážeme existenci alespoň jednoho takového vyjádření pro **B**. K tomu stačí ověřit, že pro (281) platí

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}^* = \mathbf{S} + \mathbf{W}, \\ &\mathbf{S} = \mathbf{S}^*, \\ &\mathbf{W} = -\mathbf{W}^* : \end{aligned} \tag{282}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{S} + \mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} - \mathbf{B}^*\right) = \mathbf{B}, \\ &\mathbf{S}^* = \left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*\right)\right]^* = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*\right)^* = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} + \left(\mathbf{B}^*\right)^*\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}^* + \mathbf{B}\right) = \\ &\quad = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*\right) = \mathbf{S}, \\ &\mathbf{W}^* = \left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{B} - \mathbf{B}^*\right)\right]^* = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B} - \mathbf{B}^*\right)^* = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}^* - \mathbf{B}\right) = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{B} - \mathbf{B}^*\right) = -\mathbf{W}. \end{aligned} \tag{283}$$

Úvod do teorie seqilineárních a kvadratických forem

Definice multilineárního zobrazení

Zobrazení na kartézském součinu vektorových prostorů

$$F : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{C} \tag{284}$$

nazveme multilineárním (lineárním v každé proměnné), pokud platí

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ F\left(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\right) = F\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\right) + F\left(\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\right), \\ &\text{b)}\ F\left(\lambda \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\right) = \lambda F\left(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\right). \end{aligned} \tag{285}$$

Definice seqilineární formy

V případě $n=2$ hovoříme o tzv. bilineární formě. Tehdy je nejdůležitějším případem zobrazení duality:

$$\{(\mathbf{v},\mathbf{w}')\mapsto \mathbf{w}'(\mathbf{v})\}:V\times V'\to\mathbb{C}. \tag{286}$$

Z věty o reprezentaci víme, že jakékoliv bilineární zobrazení z $V\times V'$ lze přenést na $V\times V$ vztahem

$$G(\mathbf{v},\mathbf{w})=F(\mathbf{v},\mathbf{j}(\mathbf{w})). \tag{287}$$

Potom je ale zobrazení v druhé proměnné antilineární a nikoliv lineární, tj. platí

$$F(\mathbf{v}_1,\lambda\mathbf{v}_2)=\overline{\lambda}F(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2). \tag{288}$$

Takovéto zobrazení nazveme seqilineárním zobrazením

$$S:V\times V\to\mathbb{C} \tag{289}$$

a jemu příslušející formu seqilineární formou.

Pozorování

Nechť $\hat{\mathbf{S}}=(s_{ij})$ je libovolná matice typu $n\times n$. Zobrazení

$$S:V^n\times V^n\to\mathbb{C} \tag{290}$$

definované předpisem

$$S(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}s_{ij}x_iy_j\ , \tag{291}$$

kde $\mathbf{x} = \left(x_1, \ldots, x_n\right), \quad \mathbf{y} = \left(y_1, \ldots, y_n\right) \in V^n$ je seqilineární formou na $V^n \times V^n$.
Nechť $\left\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \right\rangle$ je nějaká báze prostoru V^n. Pak existují takové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^n$, pro něž platí

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i x^i, \\ \mathbf{y} &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_j y^j. \end{aligned} \tag{292}$$

Tehdy je

$$S\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}\right) = \sum_{i,j} S\left(\mathbf{v}_i x^i, \mathbf{v}_j y^j\right) = \sum_{i,j} x^i S\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right) \overline{y}^j, \tag{293}$$

což lze v maticovém tvaru vyjádřit jako

$$S\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}\right) = \mathbf{x}\hat{\mathbf{S}}\overline{\mathbf{y}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{y}^{\mathsf{T}*}\hat{\mathbf{S}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}. \tag{294}$$

Všimněme si, že pro pevně zvolené vektory $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ jsou prostřednictvím předpisů

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\mapsto S\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0\right), \\ \mathbf{y} &\mapsto S\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}\right), \end{aligned} \tag{295}$$

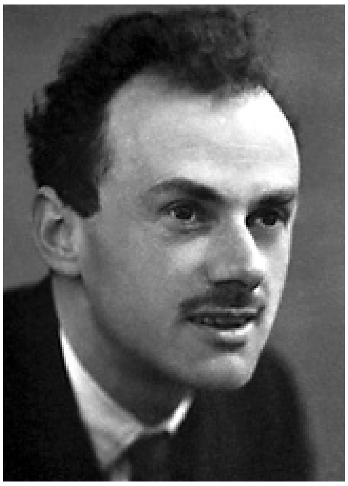
dány lineární formy na V^n.
Vidíme také, že hodnota seqilineární formy (obecně každé bilineární formy) je vlastně skalárním součinem

$$S\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}\right) = \left[\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right), \mathbf{y}\right] \tag{296}$$

kde zobrazení *f* je dáno vztahem

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right) = \hat{\mathbf{S}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}. \qquad (297)$$

Definice Diracova bracketu



Paul Adrien Maurice Dirac (1902 – 1984)

Z předchozího pozorování plyne rovnost

$$\left(\hat{\mathbf{S}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}\right)\mathbf{y} = \mathbf{y}^{\mathsf{T}*}\left(\hat{\mathbf{S}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\right). \qquad (298)$$

Provedeme-li substituci

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}; \quad \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}; \quad \hat{\mathbf{f}}\left(\hat{\mathbf{x}}\right) = \hat{\mathbf{S}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}, \qquad (299)$$

můžeme tuto rovnost zapsat jako

$$\left[\mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right), \mathbf{y}\right] = \hat{\mathbf{y}}^{*}\hat{\mathbf{f}}\left(\hat{\mathbf{x}}\right) \equiv \left\langle y \middle| f\left(x\right)\right\rangle. \qquad (300)$$

Poslední označení pochází od samotného P. A. M. Diraca a nazývá se Diracův bracket (závorka). Obecně lze tedy skalární součin psát jako

$$\left[\mathbf{x}, \mathbf{y}\right] = \hat{\mathbf{y}}^{*}\hat{\mathbf{f}}\left(\hat{\mathbf{x}}\right) = \left\langle y \middle| x\right\rangle. \qquad (301)$$

Všimněme si, obráceného pořadí vektorů (v bracketech komplexně sdružujeme vždy levý vektor). Vektory $\left\langle \psi \right|$ nazýváme bra-vektory a jejich souřadnice zapisujeme do řádku. Vektory $|\psi\rangle$ označujeme jako ket-vektory a jejich souřadnice, hermitovsky sdružené oproti odpovídajícím bra-vektorům, zapisujeme do sloupce.

Bra-vektory jsou prvky duálního prostoru a existence skalárního součinu se ukazuje být v jistém smyslu ekvivalentem možnosti rozumného vzájemného přiřazení vektorů prostoru a jeho duálu.

Pro Diracovské brackety platí následující čtyři rovnosti

1) $\langle\varphi|\psi_1+\psi_2\rangle=\langle\varphi|\psi_1\rangle+\langle\varphi|\psi_2\rangle$ (302)

2) $\langle\varphi|\lambda\psi\rangle=\lambda\langle\varphi|\psi\rangle$ (303)

3) $\langle\psi|\varphi\rangle=\langle\varphi|\psi\rangle^*$ (304)

4) $\langle\psi|\psi\rangle\geq 0$ (305)

Mezi ket-vektory a bra-vektory existuje jednojednoznačné antilineární přiřazení

$$\begin{aligned}&|\psi_{1,2}\rangle\rightleftarrows\langle\psi_{1,2}|,\\&\lambda_1|\psi_1\rangle+\lambda_2|\psi_2\rangle\rightleftarrows\lambda_1^*\langle\psi_1|+\lambda_2^*\langle\psi_2|.\end{aligned}\qquad(306)$$

Definice kvadratické formy

Restrikci

$$K_S=\{\mathbf{v}\mapsto S(\mathbf{v},\mathbf{v})\}:V\to\mathbb{C}\qquad(307)$$

nazveme kvadratickou formou příslušející dané seqilineární formě *S*. Matici $\hat{\mathbf{K}}_S=\hat{\mathbf{S}}$ nazýváme maticí kvadratické formy (307). Kvadratickou formu nazveme

a) pozitivně definitní, jestliže $\forall\mathbf{v}\in\mathbb{C}\setminus\{\mathbf{0}\}:K(\mathbf{v})>0$
b) negativně definitní, jestliže $\forall\mathbf{v}\in\mathbb{C}\setminus\{\mathbf{0}\}:K(\mathbf{v})<0$

c) pozitivně semidefinitní, jestliže
$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\} : K(\mathbf{v}) \geq 0 \wedge \exists \mathbf{v} \in \mathbb{C} : K(\mathbf{v}) = 0$

d) negativně semidefinitní, jestliže
$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\} : K(\mathbf{v}) \geq 0 \wedge \exists \mathbf{v} \in \mathbb{C} : K(\mathbf{v}) = 0$

e) indefinitní, jestliže $\exists \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{C} : K(\mathbf{u}) > 0 \wedge K(\mathbf{w}) < 0$

Rekonstrukční věta

Výše uvedenou restrikcí se neztrácí žádná informace o původní seqilineární formě S.

Důkaz

Stačí nám dokázat, že platí rovnost

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4}\left[K_S(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - K_S(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + iK_S(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - iK_S(\mathbf{x}-i\mathbf{y})\right]. \tag{308}$$

Vskutku,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left[K_S(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - K_S(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + iK_S(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) - iK_S(\mathbf{x}-i\mathbf{y})\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left[S(\mathbf{x}+\mathbf{y})^2 - S(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2 + iS(\mathbf{x}+i\mathbf{y})^2 - iS(\mathbf{x}-i\mathbf{y})^2\right] = \\
&= \frac{1}{4}\left[S(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2S(\mathbf{x},\mathbf{y}) + S(\mathbf{y},\mathbf{y}) - S(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2S(\mathbf{x},\mathbf{y}) - S(\mathbf{y},\mathbf{y}) + \right.\\
&\left. + iS(\mathbf{x},\mathbf{x}) - 2S(\mathbf{x},\mathbf{y}) - iS(\mathbf{y},\mathbf{y}) - iS(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2S(\mathbf{x},\mathbf{y}) + iS(\mathbf{y},\mathbf{y})\right] = \\
&= \frac{1}{4} \cdot 4S(\mathbf{x},\mathbf{y}) = S(\mathbf{x},\mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{309}$$

Matice přechodu seqilineární formy

Nechť $\hat{\mathbf{A}}$ resp. $\hat{\mathbf{A}}'$ je maticí formy S vzhledem k bázím $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$, resp. $\langle \mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n \rangle$. Nechť maticí přechodu od $\mathbf{v}_i$ k $\mathbf{v}'_i$ je matice $\hat{\mathbf{C}}$:

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n) \cdot \hat{\mathbf{C}}. \qquad (310)$$

Potom platí

$$\hat{\mathbf{A}}' = \hat{\mathbf{C}}^{\mathsf{T}} \hat{\mathbf{A}} \overline{\hat{\mathbf{C}}} \qquad (311)$$

Důkaz

Matici $\hat{\mathbf{A}} = a_{ij}$ lze znázornit jako maticový součin

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}, \qquad (312)$$

kde součinem prvků $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j$ rozumíme $S(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j) = a_{ij}$. Pišme vztah mezi bázemi rovněž transponovaně:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{C}}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \qquad (313)$$

a pronásobme sloupce a řádky:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 & \cdots & \mathbf{v}'_n \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{C}}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \hat{\mathbf{C}}. \qquad (314)$$

Tedy vskutku platí (311), kde pruh vyjadřuje antilinearitu v druhém činiteli.

Věta o reprezentaci seqilineární formy

Pro hermitovskou kvadratickou formu K_S na Hilbertově prostoru H existuje jednoznačně určený hermitovský operátor $f : V \to V$ takový, že

$$S(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \left[\mathbf{f}(\mathbf{v}),\mathbf{w}\right] = \left[\mathbf{v},\mathbf{f}(\mathbf{w})\right]. \qquad (315)$$

Důkaz

Nechť *S* je libovolná seqilineární forma. Reprezentujme lineární formu

$$\left\{\mathbf{v} \mapsto S(\mathbf{v},\mathbf{w})\right\} : V \to \mathbb{C} \qquad (316)$$

vektorem

$$\mathbf{w}_0 : S(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \left[\mathbf{v},\mathbf{w}_0\right] \quad \forall \mathbf{v} \in V\,. \qquad (317)$$

Potom lineární operátor

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}_0 \qquad (318)$$

splňuje hledanou rovnost (315). Dokázali jsme tedy obecnější tvrzení a hermicitu K_S resp. *S* potřebujeme jen proto, aby bylo

$$\left[\mathbf{v},\mathbf{f}(\mathbf{w})\right] = S(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \overline{S(\mathbf{w},\mathbf{v})} = \overline{\left[\mathbf{w},\mathbf{f}(\mathbf{w})\right]} = \left[\mathbf{f}(\mathbf{v}),\mathbf{w}\right]. \qquad (319)$$

Definice signatury kvadratické formy

Nechť má kvadratická forma *K* ve vhodné bázi diagonální matici, kde n^+ je počet jejích kladných diagonálních prvků, n^- počet jejích záporných diagonálních prvků a n^0 počet nulových prvků na hlavní diagonále. Vektor

$$\mathbf{s} \equiv \left(n^+, n^-, n^0\right) \qquad (320)$$

nazýváme signaturou formy *K*. Snadno nahlédneme, že pokud platí:

a) $s_1 > 0 \wedge s_1 \cdot s_2 = s_3 = 0$, je forma pozitivně definitní
b) $s_2 > 0 \wedge s_1 \cdot s_2 = s_3 = 0$, je forma negativně definitní
c) $s_2 = 0$, je forma pozitivně semidefinitní
d) $s_1 = 0$, je forma negativně semidefinitní
e) $s_1 \cdot s_2 > 0$, je forma indefinitní.

Věta o setrvačnosti

Pro reálné symetrické formy nezávisí signatura **s** na volbě báze.

Důkaz

Mějme dvě báze $\beta = \left\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \right\rangle$ a $\tilde{\beta} = \left\langle \tilde{\mathbf{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_n \right\rangle$, v nichž má daná forma *f* diagonální tvar daný maticí $\mathbf{D} = \left\{ d_i^i \right\}$ a $\tilde{\mathbf{D}} = \left\{ \tilde{d}_i^i \right\}$.
Nechť jsou prky obou bází uspořádány tak, aby platilo

$$\begin{aligned} d_i^i &\geq d_{i+1}^{i+1}, \\ \tilde{d}_i^i &\geq \tilde{d}_{i+1}^{i+1}. \end{aligned} \qquad (321)$$

Nechť i_0 je poslední index, pro který je $d_i^i > 0$. Odvodíme spor s předpokladem, že $\tilde{d}_{i_0}^{i_0} \leq 0$.
Vskutku, kdyby $\tilde{d}_j^j \leq 0$ počínaje od jistého indexu $j_0 < i_0$, mohli bychom provést následující úvahu: podprostory $L\left\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i_0} \right\rangle$ a $L\left\langle \tilde{\mathbf{v}}_{j_0}, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_n \right\rangle$ musí mít z důvodu dimenze netriviální průnik. Nechť je jím např. vektor

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{i_0} \mathbf{v}_i \lambda^i = \sum_{j=j_0}^{n} \mathbf{v}_j \mu^j \neq 0 . \qquad (322)$$

Pak ale musí být

$$j(\mathbf{w}) = \sum_i \left(\lambda^i\right)^2 d_i^i > 0 \wedge j(\mathbf{w}) = \sum_j \left(\mu^j\right)^2 \tilde{d}_j^j \leq 0 , \qquad (323)$$

což je dozajista paradox.

Jacobi – Sylvestrova věta

Označme symbolem $\hat{\mathbf{A}}$ matici formy *K* vůči nějaké zvolené bázi $\left\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \right\rangle$:

$$a_{ij} = K\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right) . \qquad (324)$$

Chceme-li tuto bázi ortogonalizovat vůči *K*, tzn. Nalézt novou bázi

$$\mathbf{f}_k = \sum_{i \leq k} \mathbf{e}_i c_k^i , \qquad (325)$$

tak, aby bylo

$$\forall j < k : K\left(\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_j\right), \qquad (326)$$

stačí volit

$$c_{kk} = \frac{\det \hat{\mathbf{A}}_{(k-1)}}{\det \hat{\mathbf{A}}_{(k)}} , \qquad (327)$$

kde $\forall k = 1, \ldots, n : \det \hat{\mathbf{A}}_{(k)} \neq 0$ je tzv. ***k*-tý hlavní minor matice** $\hat{\mathbf{A}}$, tj.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}. \tag{328}$$

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 – 1851)

James Joseph Sylvester (1814 – 1897)

Důkaz

Podmínku (326) lze nahradit podmínkou

$$\forall j < k : K\left(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_j\right). \tag{329}$$

Kalibraci bude vhodné volit jako

$$K\left(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_k\right) = 1. \tag{330}$$

Pak bude

$$c_{kk} = K\left(\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k\right). \tag{331}$$

Nalezení c_{kj} pro $j < k$ představuje řešení soustavy rovnic typu

$$\forall i < k : \sum_j K\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right) c_k^j = 0,$$
$$\forall i = k : \sum_j K\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right) c_k^j = 1, \qquad (332)$$

tedy soustavy rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{k1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} & 1 \end{array}\right). \qquad (333)$$

Z Cramerovy věty pak plyne dokazované tvrzení.

Důsledek Jacobi – Sylvestrovy věty

Nechť má matice kvadratické formy **A** všechny hlavní minory nenulové. Pak je signatura formy

$$\mathbf{s} = \left(n - n^-, n^-, 0\right), \qquad (334)$$

kde n^- je počet změn znamének v posloupnosti

$$\det \mathbf{A} \equiv \det \mathbf{A}_{(1)}, \det \mathbf{A}_{(2)}, \ldots, \det \mathbf{A}_{(n)}. \qquad (335)$$

Specielně, **A** je pozitivně definitní právě tehdy, jsou-li všechny hlavní minory kladné.

Spektrální a polární rozklad operátoru

První věta spektrálního rozkladu

Dva komutující operátory $f, g : V \to V$ mají alespoň jeden společný vlastní vektor.

Důkaz

Označme $\ker_\lambda(f)$ nulový prostor $(\mathbf{f} - \lambda\mathbf{E})$ odpovídající nějakému prvku spektra λ:

$$\ker_\lambda(f) = \left\{\mathbf{v} \middle| \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\right\}. \tag{336}$$

Jelikož platí

$$\mathbf{v} = \ker_\lambda(f) \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{g}\big(\mathbf{f}(\mathbf{v})\big) = \lambda\mathbf{g}(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{f}\big(\mathbf{g}(\mathbf{v})\big) = \lambda\mathbf{g}(\mathbf{v}), \tag{337}$$

je

$$g\big(\ker_\lambda(f)\big) \subseteq \ker_\lambda(f). \tag{338}$$

Pak ale existuje nějaký vlastní vektor restrikce operátoru na $\ker_\lambda(f)$

$$g : \ker_\lambda(f) \to \ker_\lambda(f), \tag{339}$$

který je právě oním hledaným netriviálním společným vlastním vektorem obou operátorů.

Důsledek první věty

Je-li **v** společným vlastním vektorem operátorů f a f^*, pak příslušné vlastní hodnoty

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{v}) &= \lambda\mathbf{v}, \\ \overline{\mathbf{f}}^*(\mathbf{v}) &= \lambda'\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{340}$$

splňují vztah

$$\lambda' = \overline{\lambda}. \tag{341}$$

Důkaz

$$\bar{\lambda}'[\mathbf{v},\mathbf{v}] = \left[\mathbf{v},\mathbf{f}^*(\mathbf{v})\right] = \left[\mathbf{f}(\mathbf{v}),\mathbf{v}\right] = [\lambda\mathbf{v},\mathbf{v}] = \lambda[\mathbf{v},\mathbf{v}]. \qquad (342)$$

Druhá věta spektrálního rozkladu

Nechť $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Označme symbolem *W* ortogonální doplněk $\{\mathbf{v}\}^{\perp}$. Potom platí

$$f^*(W) \subseteq W. \qquad (343)$$

Důkaz

$$\forall \mathbf{w} \in W : \left[\mathbf{v},\mathbf{f}^*(\mathbf{w})\right] = \left[\mathbf{f}(\mathbf{v}),\mathbf{w}\right] = 0. \qquad (344)$$

Třetí věta spektrálního rozkladu

Je-li $f : V \to V$ normální operátor, pak existuje ortogonální báze prostoru *V* tvořená vlastními vektory operátoru *f*.

Důkaz

Je-li *f* normální, pak spolu operátory f, f^* navzájem komutují.
Položíme-li $f^* \equiv g$, plyne důkaz z první věty spektrálního rozkladu.
Je-li **v** společným vlastním vektorem *f* a f^*, potom jsou operátory

$$f, f^* : W \to W \qquad (345)$$

opět vzájemně hermitovsky sdružené a samozřejmě stále komutují.
Lze tudíž nalézt další vlastní vektor společný *f* a f^*, tentokrát v prostoru *W*.
V případě konečné dimenze *V*, takto nalezneme konečným počtem kroků celou bázi, čímž je důkaz hotov.

Schurova věta

Každý operátor lze ve vhodné ortonormální bázi vyjádřit trojúhelníkovou maticí. Tato trojúhelníková matice je navíc pro případ normálního operátoru diagonální.

Issai Schur (1875 – 1941)

Důkaz

Důkaz plyne z páté věty Jordanovy, pokud bázi odpovídající rostoucímu systému invariantních podprostorů bereme ortonormální.

Důsledek Schurovy věty

Pro každou normální matici **A** existuje komplexní diagonální matice **D** a unitární matice **U**, pro které platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1} \equiv \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{*}. \qquad (346)$$

Je-li navíc matice **A** unitární resp. hermitovská, resp. antihermitovská, jsou na diagonále **D** komplexní jednotky, resp. reálná čísla, resp. ryze imaginární čísla.

Rozklad operátoru do projektorů

Pro každý normální operátor $f : V \to V$ existují ortogonální projekce $p_i : V \to V$ takové, že

$$p_i p_j = \delta_{ij} p_i, \tag{347}$$

kde

$$\begin{gathered} p_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \\ \sum_i p_i = E. \end{gathered} \tag{348}$$

Navíc

$$f = \sum_i \lambda_i p_i = \sum_i |\psi_i\rangle \lambda_i \langle\psi_i|, \tag{349}$$

kde λ_i jsou elementy spektra *f*.

Důkaz

Vlastní vektory $|\psi_i\rangle$ tvoří ortonormální bázi a tedy

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{350}$$

Odtud plyne, že

$$p_i p_j = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \delta_{ij} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \delta_{ij} p_i. \tag{351}$$

Důsledek

Rozklad do projektorů

$$f = \sum_i \lambda^i p_i \tag{352}$$

umožňuje definovat operátor $F\left(f\right)$ pro jakoukoliv funkci $F\left(\lambda\right)$ definovanou na spektru předpisem

$$F\left(f\right)=\sum_i F\left(\lambda^i\right)p_i\,. \qquad (353)$$

Definice neurčitosti

Definujme střední hodnotu veličiny *F* ve stavu $\left|\psi\right\rangle$ normovaném jako

$$\left\langle\psi\middle|\psi\right\rangle=1 \qquad (354)$$

coby

$$\left\langle F\right\rangle_{\boldsymbol{\psi}}=\left[\hat{\mathbf{F}}\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\psi}\right]=\left\langle\psi\middle|\hat{\mathbf{F}}\middle|\psi\right\rangle. \qquad (355)$$

Neurčitostí veličiny *F* nazýváme

$$\Delta F=\sqrt{\left\langle\left(F-\left\langle F\right\rangle\right)^2\right\rangle}\,. \qquad (356)$$

Pozorování:

Všimněme si, že $\Delta F=0$ právě když $\left|\psi\right\rangle$ je vlastním vektorem operátoru $\hat{\mathbf{F}}$.

Heisenbergův princip neurčitosti

Pro dvě hermitovské veličiny *F*, *G* platí

$$\Delta F\Delta G\geq\frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\hat{\mathbf{F}};\hat{\mathbf{G}}\right]\right\rangle\right|. \qquad (357)$$

Důkaz

Zavedeme-li operátory

$$\hat{\mathbf{F}}' = \hat{\mathbf{F}} - \langle F \rangle, \qquad \text{(358)}$$
$$\mathbf{G}' = \hat{\mathbf{G}} - \langle G \rangle,$$

snadno nahlédneme, že platí

$$\left[\hat{\mathbf{F}}';\hat{\mathbf{G}}'\right] = \left[\hat{\mathbf{F}};\hat{\mathbf{G}}\right], \qquad \text{(359)}$$

díky bilinearitě komutátoru a faktu, že čísla $\langle F \rangle, \langle G \rangle$ komutují se vším. Z Cauchyovy nerovnosti ihned plyne

$$\Delta F \Delta G \geq \left| \left[\hat{\mathbf{F}}'\psi, \hat{\mathbf{G}}'\psi \right] \right| \geq \left| \mathrm{Im}\left[\hat{\mathbf{F}}'\psi, \hat{\mathbf{G}}'\psi \right] \right| = \frac{1}{2}\left| \left[\hat{\mathbf{F}}'\psi, \hat{\mathbf{G}}'\psi \right] - \left[\hat{\mathbf{G}}'\psi, \hat{\mathbf{F}}'\psi \right] \right| =$$
$$= \frac{1}{2}\left| \left[\left(\hat{\mathbf{F}}'\hat{\mathbf{G}}' - \hat{\mathbf{G}}'\hat{\mathbf{F}}' \right)\psi, \psi \right] \right| = \frac{1}{2}\left| \left[\left[\hat{\mathbf{F}};\hat{\mathbf{G}} \right]\psi, \psi \right] \right|, \qquad \text{(360)}$$

kde Im značíme imaginární část, v předposlední úpravě jsme využili hermicitu $\hat{\mathbf{F}}$ a $\hat{\mathbf{G}}$ a poslední úprava vyplývá z rovnosti komutátorů (359).

Definice cirkulantu

Nechť $a_0, a_1, \ldots, a_n$ je nějaká číselná posloupnost. Matici

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & a_0 \end{pmatrix} \qquad \text{(361)}$$

nazýváme cirkulantem.

Harrova věta

Nechť V je vektorový prostor funkcí na grupě $\langle 0,1)$ se skalárním součinem, definovaným jako

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx, \tag{362}$$

generovaný všemi posuny o hodnoty

$$\frac{i}{n};\quad i=0,1,\ldots,n-1 \tag{363}$$

nějaké funkce ψ. Nechť dále

$$\dim V = n. \tag{364}$$

Pak existuje funkce $\phi \in V$ taková, že její posuny o hodnoty (363) tvoří ortogonální bázi V.

Alfréd Haar (1885 – 1933)

Důkaz

Napišme si matici **A** vzájemných skalárních součinů jednotlivých posunů funkce ψ. Naším úkolem bude diagonalizovat kvadratickou formu s uvedenou maticí v nové bázi, invariantní vůči všem posunům funkce ψ o hodnoty

$$\frac{i}{n}; \quad i = 1, \dots, n. \tag{365}$$

Snadno se lze přesvědčit, že matice **A** je pozitivně definitní a symetrický cirkulant. Zbývá tedy nalézt jiný cirkulant **B** takový, aby platilo

$$\mathbf{B}^*\mathbf{AB} = \mathbf{E}. \tag{366}$$

Požadujeme-li dokonce **B** hermitovskou, pak ji určíme z rovnosti

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1/2}, \tag{367}$$

což je problém, který řeší třetí věta spektrálního rozkladu.

Věta o polárním rozkladu operátoru

Regulární komplexní matici **A** lze zapsat v kterémkoliv z následujících tří tvarů:

$$\mathbf{A} = \mathbf{CV} = \mathbf{UB} = \mathbf{U}'\mathbf{D}\mathbf{V}', \tag{368}$$

kde matice $\mathbf{U}, \mathbf{U}', \mathbf{V}, \mathbf{V}'$ jsou unitární (analogie komplexních jednotek $e^{i\psi}$), matice **B,C** jsou pozitivně definitní a hermitovské, matice **D** je pozitivní, diagonální a hermitovská, tzn. reálná. Dále platí

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^*\mathbf{A} &= \mathbf{B}^2 = \mathbf{V}'^*\mathbf{D}^2\mathbf{V}', \\ \mathbf{A}\mathbf{A}^* &= \mathbf{C}^2 = \mathbf{U}'\mathbf{D}^2\mathbf{U}'^*, \\ \mathbf{U}' &= \mathbf{U}\mathbf{V}'^*. \end{aligned} \tag{369}$$

Důkaz

Pro důkaz stačí prodiskutovat spektrální rozklad matice $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, která je nutně hermitovská a pozitivně definitní. Pišme tedy

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{V}'^*\mathbf{F}\mathbf{V}', \qquad (370)$$

kde $\mathbf{F}$ je diagonální reálná pozitivní matice určená jednoznačně až na permutaci vlastních hodnot, která je Jordanovým tvarem matice $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$. Položme proto

$$\mathbf{F} = \mathbf{D}^2. \qquad (371)$$

Zřejmě je pak matice

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}'^*\mathbf{D}\mathbf{V}' \qquad (372)$$

pozitivně definitní, hermitovská a

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}^*\mathbf{A}. \qquad (373)$$

Položíme ještě

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}. \qquad (374)$$

Matice $\mathbf{U}$ je unitární, neboť

$$\mathbf{B}\mathbf{U}^*\mathbf{U}\mathbf{B} = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{B}^2 \Rightarrow \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{E}. \qquad (375)$$

Pro $\mathbf{U}' = \mathbf{U}\mathbf{V}'^*$ také platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{V}'^*\mathbf{D}\mathbf{V}' = \mathbf{U}'\mathbf{D}\mathbf{V}'. \qquad (376)$$

Golden – Thompsonova nerovnost

Pro libovolné dva hermitovské operátory **A**, **B**, platí nerovnost

$$\operatorname{Tr}\exp(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \le \operatorname{Tr}\exp\mathbf{A}\exp\mathbf{B}\,. \qquad (377)$$

Colin J. Thompson

Sidney Golden

Důkaz

Rozepíšeme levou i pravou stranu jako

$$\begin{gathered}\sum\frac{\operatorname{Tr}\left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)^{n}}{n!},\\ \sum\frac{\operatorname{Tr}\mathbf{A}^{k}\mathbf{B}^{l}}{k!l!}.\end{gathered} \qquad (378)$$

Vidíme, že stačí dokázat nerovnosti typu

$$\operatorname{Tr}\left(\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{A}''\mathbf{B}''\ldots\right) \le \operatorname{Tr}\left(\mathbf{A}'\mathbf{A}''\ldots\mathbf{B}'\mathbf{B}''\ldots\right), \qquad (379)$$

kde čárkami rozlišujeme nějaké mocniny matic. Předpokládejme, že **A** a **B** jsou hermitovské matice a **B** je již dokonce diagonální. To smíme dle třetí věty spektrálního rozkladu a díky cykličnosti stopy.

Rozepíšeme-li nyní stopy zmíněných maticových součinů v (379), pak ze známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} \le \frac{n_1}{n} x^n + \frac{n_2}{n} y^n + \frac{n_2}{n} z^n; \quad n = n_1 + n_2 + n_3, \tag{380}$$

plyne nerovnost (379). Napišme si to podrobněji např. pro

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} = \mathbf{A}' = \mathbf{A}'' = \cdots, \\ &\mathbf{B}' = \mathbf{D}^{n_1}; \mathbf{B}'' = \mathbf{D}^{n_2}; \mathbf{B}''' = \mathbf{D}^{n_3}. \end{aligned} \tag{381}$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k} a_i^j \left(d_j\right)^{n_1} a_j^k \left(d_k\right)^{n_2} a_l^k \left(d_l\right)^{n_3} \le \frac{n_1}{n} \mathrm{Tr}\mathbf{A}\mathbf{D}^n\mathbf{A}^2 + \frac{n_2}{n} \mathrm{Tr}\mathbf{A}^2\mathbf{D}^n\mathbf{A} + \frac{n_2}{n} \mathrm{Tr}\mathbf{A}^3\mathbf{D}^n = \\ = \mathrm{Tr}\mathbf{A}^3\mathbf{D}^n. \end{aligned} \tag{382}$$

Základy tenzorové algebry

Definice tenzorového prostoru

Tenzorovým prostorem nazýváme tzv. tenzorový součin $V \otimes W$ vektorových prostorů V, W, tj. prostor všech bilineárních forem na kartézském součinu $V' \times W'$ duálních prostorů.

Definice tenzoru

Prvky prostoru $V \otimes W$ nazýváme tenzory a zapisujeme je ve tvaru

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \sum_{i,j} \left(\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j\right) t^{ij} \tag{383}$$

kde $\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j$ je nové označení pro prvek $\left(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j\right)$ kartézského součinu bází prostorů *V* a *W*, nazývaný dyadickým součinem vektorů $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j$, který je prvkem báze $V \otimes W$.

Pozorování

Nechť

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\in \sum_i \mathbf{v}_i \lambda^i, \\ \mathbf{w} &\in \sum_j \mathbf{w}_j \mu^j. \end{aligned} \tag{384}$$

potom

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} \equiv T^{ij} \equiv v^i w^j \equiv \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \sum_{i,j} \left(\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j\right) \lambda^i \mu^j. \tag{385}$$

Asociativita tenzorového součinu

Tenzorový součin více než dvou prostorů (např. *U*, *V*, *W*) lze zkonstruovat jako součin $\left(U \otimes V\right) \otimes W$, nebo $U \otimes \left(V \otimes W\right)$. Obě dvě definice vedou k izomorfním prostorům, o kteréžto vlastnosti hovoříme jeko o asociativitě tenzorového součinu.
Prvky tenzorového součinu $U \otimes V \otimes \cdots \otimes Z$ zapisujeme jako

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} \equiv T^{ij\ldots n} \equiv u^i v^j \cdots z^n \equiv \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \cdots \otimes \mathbf{z} = \sum_{i,j,\ldots,z} \left(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{z}_n\right) \cdot t^{ij\ldots n}. \tag{386}$$

Tenzor lze tedy chápat jako tabulku čísel indexovanou několika indexy, avšak dávající informaci pouze ve zvolených bázích v prostorech *U*, *V*, ... , *Z*. Se změnou báze se mění i tabulka složek tenzoru.

Komutativita a distributivita tenzorového součinu

Definice jest tedy taková, že

$$\dim\left(V\otimes W\right)=\dim V\cdot\dim W, \tag{387}$$

zatímco

$$\dim\left(V\times W\right)=\dim V+\dim W=\dim\left(V\oplus W\right). \tag{388}$$

Prostor $V\otimes W$ je izomorfní prostoru $W\otimes V$, o kteréžto skutečnosti hovoříme, jako o komutativitě tenzorového součinu.
Můžeme rovněž konstruovat izomorfismy mezi prostory

$$U\otimes\left(V\oplus W\right)=\left(U\otimes V\right)\oplus\left(U\otimes W\right), \tag{389}$$

vyjadřující distributivitu tenzorového součinu.

První věta tenzorové algebry

Každá bilineární forma B na $V'\times W'$ je určena jednoznačně čísly

$$b^{ij}=B\left(\mathbf{v}'^{i},\mathbf{w}'^{j}\right), \tag{390}$$

kde $\left\{\mathbf{v}'^{i}\right\}$, resp. $\left\{\mathbf{w}'^{i}\right\}$ označuje duální bázi.

Důkaz

$$B\left(\sum\alpha_i\mathbf{v}'^{i},\sum\beta_j\mathbf{w}'^{j}\right)=\sum\alpha_i\beta_jB\left(\mathbf{v}'^{j},\mathbf{w}'^{j}\right). \tag{391}$$

Věta o transformaci tenzoru

Vyjádříme-li tenzor $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ v nových bázích $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\},\{\tilde{\mathbf{v}}_j\},\ldots,\{\tilde{\mathbf{z}}_n\}$ prostorů *U*, *V*, ... , *Z* a matice přechodu od nevlnkovaných bází k vlnkovaným označíme $\hat{\mathbf{U}},\hat{\mathbf{V}},\ldots,\hat{\mathbf{Z}}$, tj.

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{\mathbf{u}}_1,\ldots,\tilde{\mathbf{u}}_n\right)&=\left(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\right)\hat{\mathbf{U}},\\
\left(\tilde{\mathbf{v}}_1,\ldots,\tilde{\mathbf{v}}_n\right)&=\left(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\right)\hat{\mathbf{V}},\\
&\vdots\\
\left(\tilde{\mathbf{z}}_1,\ldots,\tilde{\mathbf{z}}_n\right)&=\left(\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_n\right)\hat{\mathbf{Z}}.
\end{aligned} \tag{392}$$

potom složky tenzoru $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ zapsaného v nových bázích

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}=\sum_{i,j,\ldots,z}\left(\tilde{\mathbf{u}}_i\otimes\tilde{\mathbf{v}}_j\otimes\cdots\otimes\tilde{\mathbf{z}}_n\right)\cdot\tilde{t}^{ij\ldots n} \tag{393}$$

lze v původních bázích vyjádřit jako

$$t^{ij\ldots n}=\sum_{\tilde{i},\tilde{j},\ldots,\tilde{z}}\left(u^i_{\tilde{i}}v^j_{\tilde{j}}\cdots z^n_{\tilde{n}}\right)\cdot\tilde{t}^{\tilde{i}\tilde{j}\ldots\tilde{n}}. \tag{394}$$

Důkaz

Stačí dosadit

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}_{\tilde{i}}&=\sum_i\mathbf{u}_iu^i_{\tilde{i}},\\
\tilde{\mathbf{v}}_{\tilde{j}}&=\sum_j\mathbf{v}_jv^j_{\tilde{j}},\\
&\vdots\\
\tilde{\mathbf{z}}_{\tilde{n}}&=\sum_n\mathbf{z}_nz^n_{\tilde{n}},
\end{aligned} \tag{395}$$

a tenzorově roznásobit s užitím distributivního zákona

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \sum_{\tilde{i},\tilde{j},\ldots,\tilde{z}} \sum_{i,j,\ldots,z} \left(\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{z}_n\right)\left(u^i_{\tilde{i}} v^j_{\tilde{j}} \cdots z^n_{\tilde{n}}\right) \tilde{t}^{\tilde{i}\tilde{j}\ldots\tilde{n}} . \qquad (396)$$

Kovariance a kontravariance

Tenzor tvaru

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathbf{T}} &= \sum a^{ij\ldots m}_{kl\ldots n} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}'^k \otimes \mathbf{e}'^l \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}'^n \in \\ &\in E \otimes E \otimes \cdots \otimes E' \otimes E' \otimes \cdots .\end{aligned} \qquad (397)$$

nazýváme *m*-krát kontravariantním a *n*-krát kovariantním tenzorem, nebo krátce tenzorem typu (*n*, *m*).
Změňme nyní bázi $\{\mathbf{e}_i\}$ a odpovídajícím způsobem i duální bázi $\{\mathbf{e}'^i\}$.
Matice $\hat{\mathbf{C}}$ nechť je maticí přechodu od báze $\langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ k nové bázi $\langle \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n \rangle$, tj.

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_i &= \mathbf{e}_j c^j_i ,\\ \mathbf{f}'^{\tilde{i}} &= \left(c^{-1}\right)^{\tilde{i}}_j \mathbf{e}'^j = \mathbf{e}'^j d^{\tilde{i}}_j ,\end{aligned} \qquad (398)$$

kde $\left(c^{-1}\right)^i_j$ jsou elementy inverzní matice a d^i_j elementy kontragradientní matice

$$\hat{\mathbf{D}} = \left(\hat{\mathbf{C}}^{-1}\right)^{\mathsf{T}} . \qquad (399)$$

Potom se složky tenzoru s oběma druhy indexů transformují podle schématu

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\mathbf{T}} &= a^{ij\ldots m}_{kl\ldots n}\, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}'^k \otimes \mathbf{e}'^l \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}'^n = \\ &= \tilde{a}^{\tilde{i}\tilde{j}\ldots\tilde{m}}_{\tilde{k}\tilde{l}\ldots\tilde{n}}\, \mathbf{f}_{\tilde{i}} \otimes \mathbf{f}_{\tilde{j}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{f}'^{\tilde{k}} \otimes \mathbf{f}'^{\tilde{l}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{f}'^{\tilde{n}} ,\end{aligned} \qquad (400)$$

kde

$$a^{ij\dots m}_{kl\dots n} = c^{i}_{\tilde{i}} c^{j}_{\tilde{j}} \cdots c^{m}_{\tilde{m}} \tilde{a}^{\tilde{i}\tilde{j}\dots\tilde{m}}_{\tilde{k}\tilde{l}\dots\tilde{n}} \left(c^{-1}\right)^{\tilde{k}}_{k} \left(c^{-1}\right)^{\tilde{l}}_{l} \cdots \left(c^{-1}\right)^{\tilde{n}}_{n}. \qquad (401)$$

Symetrizace a antisymetrizace

(Anti)symetrizací tenzoru se souřadnicemi $c_{ij\dots p}$ nazveme tenzor

$$(\mathrm{anti})\mathrm{sym}_{i,j,\dots,m} c_{ij\dots m} = \frac{1}{n!} \sum_{P_i} \left((-1)^{S_p} \right) c_{P_i(i),P_i(j),\dots,P_i(m)}, \qquad (402)$$

kde sčítáme přes všechny permutace P_i množiny písmen pro indexy $\{i, j, \dots, p\}$ a operátor parity $(-1)^{S_p}$ píšeme jen pro případ antisymetrizace.
Indexy, podle nichž (aniti)symetrizujeme, budeme nadále odlišovat závorkami, dle schématu

$$\begin{aligned} \mathrm{sym}_{kl} t^{i}_{jklmn} &\equiv t^{i}_{j(kl)mn}, \\ \mathrm{antisym}_{kl} t^{i}_{jklmn} &\equiv t^{i}_{j\langle kl\rangle mn}. \end{aligned} \qquad (403)$$

Faktor $\frac{1}{n!}$ je volen tak, aby dvojí provedení (anti)symetrizave dalo totéž co provedení jediné. (Anti)symetrizací totiž získáme (anti)symetrický tenzor, to jest takový, že pro každou permutaci P_i platí

$$c_{ij\dots m} = \left((-1)^{S_p} \right) c_{P_i(i),P_i(j),\dots,P_i(m)}. \qquad (404)$$

Multilineární formu *f* nazveme (anti)symetrickou, pokud pro všechny *n*-tice vektorů z *E* platí vztah

$$f\left(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\right) = \left((-1)^{S_p} \right) f\left(\mathbf{v}_{P_i(1)}, \dots, \mathbf{v}_{P_i(n)} \right). \qquad (405)$$

Symetrizovaný tenzorový součin

Symetrizovaným tenzorovým součinem $E \odot E$ rozumíme množinu všech kombinací symetrizovaných tenzorů typu $\mathbf{v} \odot \mathbf{w}$. Abstraktně lze $E \odot E$ definovat jako faktorizaci prostoru $E \otimes E$ podle podprostoru generovaného všemi prvky tvaru $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$.

Antisymetrizovaný tenzorový součin

Antisymetrizovaným (Grassmannovým) tenzorovým součinem $E \bigcirc E$ rozumíme množinu všech kombinací antisymetrizovaných tenzorů typu $\mathbf{v} \bigcirc \mathbf{w}$.

Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877)

Abstraktně tento prostor definujeme jako faktorizaci prostoru $V \bigcirc V$ podle jeho podprostoru generovaného prvky

$$\mathbf{e} \otimes \mathbf{f} + \mathbf{f} \otimes \mathbf{e}, \qquad (406)$$

čímž ve faktorizaci ztotožňujeme tenzory $\mathbf{e} \otimes \mathbf{f}$ a $\mathbf{f} \otimes \mathbf{e}$.
Obecněji, prostor

$$\bigcirc^m (E) \equiv E \bigcirc_1 \cdots \bigcirc_m E \qquad (407)$$

definujeme jako faktorizaci $E \otimes \cdots \otimes E$ podle prostoru *Z*, generovaného tenzory typu

$$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_m - (-1)^{S_p} \otimes \mathbf{e}_{P_i(1)} \otimes \mathbf{e}_{P_i(2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{P_i(m)}, \qquad (408)$$

kde P_i je permutace na indexové množině $\{1,\ldots,m\}$. Příslušnou třídu

$$\mathbf{e}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_m + Z \qquad (409)$$

označujeme symbolem

$$\mathbf{e}_1 \bigcirc \cdots \bigcirc \mathbf{e}_m. \qquad (410)$$

Definice rozložitelného tenzoru

Tenzor $\overleftrightarrow{\mathbf{T}} \in V \otimes W$ nazveme rozložitelným, pokud je tvaru $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$. Vektory **v**, **w** jsou určeny až na to, že lze jeden z nich vydělit a druhý vynásobit nějakým číslem λ jednoznačně.
Specielně, tenzor $\overleftrightarrow{\mathbf{T}} \in \bigcirc^k(E)$ je rozložitelným, existují-li vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ takové, že $\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \mathbf{v}_1 \bigcirc \ldots \bigcirc \mathbf{v}_k$.

Defice symetrické algebry prostoru

Formální direktní součet (kartézský součin prostorů se sčítáním definovaným po komponentách)

$$R \oplus E \oplus (E \odot E) \oplus (E \odot E \odot E) \oplus \cdots \qquad (411)$$

nazýváme symetrickou algebrou prostoru *E*. Symetrická algebra je vždy nekonečněrozměrným prostorem.

Definice antisymetrické algebry prostoru

Antisymetrickou algebrou prostoru *E* rozumíme direktní součet

$$\bigcirc(E) = R \oplus E \oplus (E \bigcirc E) \oplus \cdots \oplus \bigcirc^n(E). \qquad (412)$$

Pro konečněrozměrný prostor E^n je $\mathbf{e}_1 \bigcirc \ldots \bigcirc \mathbf{e}_n$ bází prostoru $\bigcirc^k(E)$, tj.

$$\dim \bigcirc(E^n) = \sum_{k=0}^{n} \dim \bigcirc^k (E^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} = 2^n \tag{413}$$

Exponenciela vektorového prostoru

Direktní součet

$$\exp(E) = R \oplus \frac{1}{1!} E \oplus \frac{1}{2!}(E \odot E) \oplus \frac{1}{3!}(E \odot E \odot E) \oplus \cdots \tag{414}$$

nazveme exponencielou vektorového prostoru *E*. Prvky této algebry lze interpretovat jako formální mocninné řady nad *E*.